ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

1 Rappel

Exemple 1.
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit (E) l'équation différentielle : $(y-1)y' = 4x+2$.
   (a) Que peut-on dire des solutions de (E) pour $x = -\frac{1}{2}$?
   Vidéo : Exemple 1 a)
   (b) La fonction f définie par $f(x) = 2x+2$ est-elle une solution de (E) ?
   Vidéo : Exemple 1 b)
   (c) Un étudiant affirme : " les fonctions $x \longrightarrow 1+\sqrt{4x^2+4x+k}$ où k est une constante pour laquelle ces fonctions sont bien définies, sont solutions de l'équation (E)."
   Un autre étudiant lui répond : "Ce n'est pas possible car :
   — On a déjà une solution.
   — Le produit de $(y-1)y'$ est le polynôme $4x+2$, il ne peut donc pas y avoir une racine carré dans la solution.
   — Lorsque que l'on remplace la fonction dans $y'(1-y)$ il restera la constante k, alors que dans $4x+2$ il n'y a pas de constante.
   Qui des deux étudiants a raison ?
   Vidéo : Exemple 1 c)
   (d) Peut-il y avoir d'autres solutions ?
   Vidéo : Exemple 1 d)
2. Déterminer les solutions de l'équation $2x' + 3x = t$.
   Vidéo : Exemple 1 2)

2 Équations différentielles linéaires à coefficients non constants

2.1 Equations linéaires homogènes du 1er ordre

Théorème 1.
Soient a une fonction continue sur I. Les solutions de l'équation homogène (H) : $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto ke^{-A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et A une primitive de a sur I.

Exemple 2.

1. Résoudre l'équation différentielle : $2y' + xy = 0$.
   Vidéo : Exemple 2 1)
2. Démonstration du théorème : soit A une primitive de a et supposons que (H) admette une solution f. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x)e^{A}$.

(a) Exprimer f en fonction de g.

(b) Sachant que f est une solution de (H), déterminer g' et en déduire g.

(c) En déduire les éventuelles solutions de (H).

(d) En déduire les solutions de (H).

Vidéo : Exemple 2 2)

2.2 Equations linéaires du 1er ordre avec second membre

D'après le cours sur les équations différentielles vu en début d'année, nous savons que les solutions sont la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Nous avons donc la proposition ci-dessous :

Proposition 2.
Soit a et b deux fonctions continues, et A une primitive de a sur un intervalle I. Soit (E) l'équation différentielle : $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

Alors la solution générale de (E) sur I est de la forme : $y = g(x) + ke^{-A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et g une solution particulière que l'on peut calculer à l'aide de la méthode de "la variation de la constante" décrite ci-dessous.

Méthode de la variation de la constante

— On cherche g sous la forme $g(x) = k(x)e^{-A}$.

— On remplace g dans l'équation.

— On en déduit k'.

— Puis k.

— Et enfin g.

Vidéo : La méthode de la variation de la cst

Exemple 3.
Résoudre sur $I =]1; +\infty[$, l'équation différentielle $(E) : y' + \dfrac{1}{x \ln x} y = \dfrac{e^x}{\ln x}$

Vidéo : Exemple 3

2.3 Equation avec condition initiale - Problème de Cauchy

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire du 1er ordre (E) avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$, c'est déterminer la solutions y de (E) **unique** qui vérifie (E). La donnée de l'équation avec une condition initiale est également appelée problème de Cauchy du premier ordre.

Exemple 4.
Déterminer la solution f de l'équation $xy' + 2y = x + 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $f(1) = 2$.

Vidéo : Exemple 4

3 Equations à variables séparables

Définition 1.
Une équation différentielle du premier ordre à variables séparables est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$y'g(y) = f(x)$$

où y est la fonction inconnue de l'équation et g et h deux fonctions continues sur un intervalle I.

Proposition 3.
On résout l'équation $y'g(y) = f(x)$ en intégrant les deux membres de l'équation et on obtient $G(y) = F(x)$ avec G et F des primitives des fonctions respectivement de g et f.

Exemple 5.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'y^2 = 0$.
2. $y' = y^2$.
3. $y'(e^y + 1) = x$.

Vidéo : Exemple 5

Remarque 1.
D'après l'exemple précédent :

— Il faut parfois réduire l'intervalle d'étude pour obtenir $y'g(y) = f(x)$ (Dans 2., on prend un intervalle I sur lequel : $\forall x \in I, y(x) \neq 0$), l'équation initiale n'est donc pas toujours équivalente à : $y'g(y) = f(x)$.

— Il faut étudier les cas que l'on a écartés pour obtenir $y'g(y) = f(x)$ (Dans 2. on a rajouté la fonction nulle comme solution).

— Lorsque l'on obtient $G(y) = F(x)$, on obtient de façon implicite la solution y, mais on ne peut pas toujours exprimer y en fonction de x, (comme dans 3. par exemple).

Remarque 2. En physique
En physique, la présentation du calcul est souvent la suivante : $\frac{dy}{dx}g(y) = f(x)$ (1) donc $g(y)dy = f(x)dx$ (2), puis on intègre les deux membres de l'égalité respectivement par rapport à y et à x.

1. Dans l'égalité (1), y est-elle une fonction ou une variable ?
2. Dans l'égalité (2), y est-elle une fonction ou une variable ?
3. Expliquer ce paradoxe apparent.

Vidéo : Remarque 2

Remarque 3. On trouve, dans des livres ou sur internet, la démonstration suivante pour résoudre $y' + a(x)y = 0$:

$$\begin{aligned} y' + ay = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -ay \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -a\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad \ln y = -\int a\,dx + K \quad \Leftrightarrow \quad y = ke^{-\int a\,dx} \end{aligned}$$

1. Comment s'appelle cette méthode ?
2. Ces équivalences sont-elles exactes ?

Vidéo : Remarque 3

Comme on l'a vu précédemment, il est délicat de résoudre avec rigueur une équation différentielle en séparant les variables, pour les équations différentielles linéaires, on appliquera donc directement les résultats du paragraphe sur les équations linéaires

4 Équation homogène

Définition 2.
Une équation différentielle est dite homogène s'il existe un intervalle I sur lequel l'équation peut s'écrire sous la forme $y' = g(\frac{y}{x})$.

Exemple 6.
Montrer que l'équation $xy' = x + y$ est une équation homogène.

Vidéo : Exemple 6

Remarque 4.
Attention à ne pas confondre : "équation homogène" et "équation homogène d'une équation linéaire".

Propriété 1.
Soit $y' = g(\frac{y}{x})$ une équation homogène. En posant $z = \frac{y}{x}$, l'équation devient une équation à variables séparables en z.

Exemple 7.
Montrer la propriété précédente.

Vidéo : Exemple 7

Exemple 8.
Résoudre l'équation : $xy' = x + 2y$.

Vidéo : Exemple 8

5 Exercices

Exercice 1.
Reconnaitre parmi les équations suivantes les équations linéaires et les résoudre :

1. $(1-x^2)y' = (2-x)y$ sur $]-\infty;-1[$
2. $xy^2y' = x^3 + y^3$
3. $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $x - y + xy' = 0$ sur $]0,+\infty[$
5. $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]0;1[$
6. $(x^2 - y^2)y' = xy$
7. $y' - xy = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$ sur $]0;\Pi[$

9. $y' - xe^{-y} = 0$
10. $y^2 + (x+1)y' = 0$
11. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$
12. $yy' = x$
13. $y = \ln y'$

Exercice 2.
On considère l'équation différentielle linéaire du 1er ordre (E) suivante, définie sur $I =]0; +\infty[$ par

$$(E) : x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$$

.

1. Pour tout $x \in I$, on définit $f(x) = 1 + \ln^2(x)$. Déterminer pour tout $x \in I$, $f'(x)$.
2. Déterminer les solutions y_H de l'équation homogène (H) associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière y_0 de l'équation différentielle (E).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Quelle est l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale : $y(1) = 2$.

Exercice 3.
Reprendre l'énoncé de l'exercice 1, reconnaitre et résoudre les équations à variables séparables et les équations homogènes.

Exercice 4.
Trouver une courbe du plan, d'équation $y = f(x)$,passant par le point $(0\,;\,3)$ et dont la pente de la tangente au point $M(x;y)$ est $\dfrac{2x}{y^2}$.

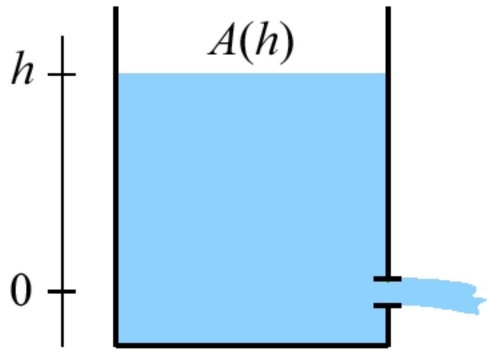
Exercice 5.

La loi de Torricelli donne une relation entre la vitesse d'écoulement d'un liquide par l'orifice d'un récipient et la hauteur de liquide au-dessus de l'orifice.

Soit $h(t)$ la hauteur de liquide contenu dans le récipient au-dessus de l'orifice au temps t et $A(h)$ l'aire de la surface du liquide quand la hauteur du liquide est h. On a la relation (E) :

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

où k est une constante positive dépendant de certains facteurs, comme la viscosité du liquide et l'aire de la section du trou d'écoulement.



1. Justifier physiquement le signe de $h'(t)$.
2. Au temps $t = 0$, un réservoir cylindrique de rayon R en mètres, contient H mètres d'eau au-dessus de l'orifice.
   (a) Quelle conjecture peut-on faire sur la représentation graphique de h ?
   (b) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) et en déduire $h(t)$.

(c) Représenter graphiquement h. La courbe est-elle cohérente avec la conjecture de la question 1 ?

3. Reprendre la question précédente avec un réservoir conique de hauteur H, de rayon R et dont l'orifice est au sommet du cône.

Exercice 6.
Dans un gaz parfait, qui modélise bien le comportement des gaz aux pressions et températures usuelles, on obtient que la pression dans un gaz en équilibre (donc sans mouvement) sous l'effet de la pesanteur obéit à l'équation différentielle (E) suivante, la variable étant l'altitude z :

$$\frac{dp}{dz} + \frac{Mg}{RT}p = 0$$

avec M : masse molaire du gaz, constante ; pour l'air, M = 0,00290 kg/mol $g = 9,81 m/s^2$: accélération de la pesanteur R=8,314 J/K/mol : constante des gaz parfaits

T représente la température du gaz, en kelvins. Or dans l'atmosphère, la température n'est pas constante. Un modèle très fréquemment utilisé est de postuler une décroissance linéaire de la température avec l'altitude : $T(z) = T_0(1 - kz)$, T_0 étant la température au niveau de la mer, et le coefficient k étant une constante.

Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 7.
On considère l'équation différentielle : $x(x-1)y' - y(y-1) = 0$

1. Sans résoudre l'équation, montrer que l'intersection entre l'ensemble des courbes intégrales et la droite d'équation $x = 0$ se réduit à deux points fixes maximum, et de même avec la droite d'équation $x = 1$.