

Exemple 5

$$1) \quad y' y^2 = 0 \Rightarrow g(y) = y^2 \\ f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3} = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Prop 3

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{3k} \Rightarrow \underline{y = cte}$$

2). Soit I un intervalle tel que
 $\forall x \in I, y(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \forall x \in I, \frac{y'}{y^2} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + k, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{x+k}, k \in \mathbb{R}.$$

• On remarque que la fonction nulle,
$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & 0 \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$
, est aussi solution.

• on n'a pas étudié tous les cas
(voir 1) et 2) remarque 1)

$$3) \quad y'(e^y + 1) = x \Leftrightarrow e^y + y = \frac{x^2}{2} + k \\ k \in \mathbb{R}$$

on ne peut pas aller plus loin
 dans la résolution de cette équation,
 on ne peut exprimer y en fonction de x
 (voir 3) remarque 1)

Remarque 2 :

- 1) y est une fonction
- 2) y est une variable, au sens physique
- 3) Cela provient de l'abus de notation

avec la différentielle et la dérivée avec

Leibnitz :

$$\frac{dy}{dx}(x) = y'(x) \Leftrightarrow \overset{\text{fonction}}{dy}_x = \overset{\text{fonction}}{y'(x)} \overset{\text{fonction}}{dx} \quad \text{Maths}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{dy}_{\substack{\text{accroissement} \\ \text{infinitésimal} \\ \text{de } y}} = y' \underbrace{dx}_{\substack{\text{accroissement} \\ \text{infinitésimal} \\ \text{de } x}} \quad \text{physique}$$

Remarque 3

- 1) on résout une équation différentielle linéaire homogène comme une équation différentielle à variable séparable.

$$2) \cdot \frac{dy}{dn} = -ay \quad \not\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -a dn$$

car on peut avoir $y=0$ $\triangle$

$$\cdot \int \frac{dy}{y} = \ln |y| \neq \ln y.$$

Conclusion : cette résolution, qui peut paraître juste est en fait fautive, même si au final, on trouve quand même la bonne solution.

Exemple 6

$$ny' = n + y \Leftrightarrow y' = 1 + \frac{y}{n} \text{ et } \underline{n \neq 0}$$

l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$

Exemple 7

$$\text{on pose } z = \frac{y}{n} \Rightarrow z^n = y$$

$$\Rightarrow z' n + z = y'$$

$$\Rightarrow y' = g\left(\frac{y}{n}\right) \Leftrightarrow z' n + z = g(z)$$

$$\Leftrightarrow z' n = g(z) - z$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{g(z) - z} = \frac{1}{n} \quad \text{avec } g(z) - z \neq 0.$$

Exemple 8

• $ny' = n + 2y \Rightarrow y' = 1 + 2\frac{y}{n}$ et $n \neq 0$
on reconnaît une équation homogène

• On pose $z = \frac{y}{n} \Rightarrow y' = z'n + z$

$$\text{d'où : } z'n + z = 1 + 2z$$

$$\Rightarrow z'n = 1 + z$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{1+z} = \frac{1}{n} \Rightarrow \ln|1+z| = \ln|n| + k$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |1+z| = e^{\ln|n| + k}$$

$$\Rightarrow |1+z| = e^k \cdot |n|$$

$$\Rightarrow 1+z = C \cdot n, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{n} = -1 + Cn \quad C = \pm e^k.$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -n + Cn^2, \quad C \in \mathbb{R}}$$