MATRICES

Objectifs
- **Savoir transposer une matrice.**
- **Savoir calculer un déterminant.**
- **Savoir calculer l'inverse d'une matrice.**

Dans tout le chapitre on désignera par $\mathbb{K}$ les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Les matrices

1.1 Transposition des matrices

Définition 1.
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice quelconque. On appelle transposée de la matrice A, la matrice notée ${}^tA$ ou A^T appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et définie par :

$$ {}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\1\leqslant i\leqslant n}} $$

dit autrement : les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A.

c'est à dire en version étendue :

$$ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} $$

Exemple 1.
Déterminer ${}^tA$ avec

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) $$

Propriété 1.

(i)

$$ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB $$

(ii)

$$ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA $$

(iii)

$$ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A $$

(iv)

$$ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB {}^tA $$

2 Les matrices carrées

2.1 Particularités des matrices carrées

Définition 2.
On appelle matrice carrée, une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$, plutôt que $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Toutes les opérations et propriétés définies sur des matrices quelconques appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ restent valables sur les matrices carrées. Il existe cependant une matrice particulière appelée matrice identité, élément neutre pour la multiplication des matrices :

Définition 3.
La matrice identité est notée I_n et on a :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

C'est d'ailleurs une matrice pour laquelle on a commutativité du produit matriciel c'est à dire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = I_nA = A$$

Définition 4.
On peut aussi définir la puissance n$^{\text{e}}$ d'une matrice carrée, par récurrence, c'est à dire :

$$\begin{aligned} &A^0 = I_n \\ &A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A \end{aligned}$$

Théorème 1. Binôme de Newton pour les matrices
Soient X et Y appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que X et Y commutent, c'est à dire $XY = YX$ (ce qui reste assez rare) alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^{n-k}Y^k$$

Attention, cette formule est évidemment fausse si les matrices ne commutent pas.

Exemple 2.
Soit A et B deux matrices qui commutent. Développer $(A+B)^2$.

Il existe d'autres matrices carrées particulières dont on se sert assez souvent :

Définition 5 (Les matrices diagonales)**.**
Une matrice diagonale est une matrice ayant tous les éléments hors de la diagonale principale[1] nuls et ceux de la diagonale sont quelconques. (Ils peuvent donc être nuls ! La matrice O étant bien entendu une matrice diagonale)

1. c'est à dire la diagonale partant du haut à gauche pour finir en bas à droite

Exemple 3.
Les matrices A et B suivantes sont-elles diagonales ?
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 2.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Retenez bien cette propriété, elle va beaucoup nous servir !

Définition 6 (Matrices triangulaires)**.**
Une matrice *triangulaire supérieure* est une matrice carrée ayant ses coefficients en dessous de la diagonale principale qui sont nuls.

Une matrice *triangulaire inférieure* c'est bien sûr le contraire, c'est à dire que c'est une matrice carrée ayant ses coefficients au dessus de la diagonale principale qui sont nuls.

Exemple 4.
Écrire une matrice triangulaire inférieure et une matrice triangulaire supérieure.

Définition 7 (Trace d'une matrice carrée)**.**
On appelle trace d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la somme des éléments de la diagonale principale et on la note $tr(A)$, c'est à dire que

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$$

Exemple 5.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -12 \end{pmatrix}$. Calculer $tr(A)$.

Propriété 3.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices carrées, et ${}^tA$ la transposée de A, alors
- $tr(A) = tr\left({}^tA\right)$
- $tr(A + \lambda B) = trA + \lambda trB, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2.2 Déterminant des matrices carrées

Le déterminant d'une matrice peut se calculer à l'aide des deux définitions suivantes :

Définition 8. *Matrice de dimension 2*

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Le déterminant de A est noté $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Définition 9. *Matrice de dimension n avec $n \geqslant 3$*
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n, et soit A_{ij} la matrice sans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Pour tout $j \in \{1; 2...n\}$, $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ (On développe suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne).

Pour tout $i \in \{1; 2...n\}$, $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ (On développe suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne).

Remarque 1.
La définition précédente est valable quelque la dimension de la matrice, il existe cependant une autre façon de calculer le déterminant d'une matrice de dimension 3, à l'aide de la règle dite de Sarrus (mathématicien français 1798-1861) :

Pour calculer $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ on recopie les deux premières colonnes à droite : $\begin{bmatrix} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & i & c & f \end{bmatrix}$

puis on soustrait la somme des produits des trois diagonales secondaires à la somme des produits des trois diagonales principales, et on obtient :

$\det A = aei + dhc + gbf - (ceg + fha + ibd)$.

Exemple 6.
Calculer le déterminant suivant en développant suivant une ligne, puis suivant une colonne.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2.1 Propriétés importantes

- $\forall n \geqslant 2, \det I_n = 1$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det AB = \det A \det B$
- $\det A = \det {}^tA$
- Le déterminant d'une matrice qui a deux colonnes proportionnelles ou deux lignes proportionnelles est nul.

2.3 Inverse d'une matrice carrée

Définition 10.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice, notée, $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. On appelle A^{-1}, la matrice inverse de la matrice A.

Exemple 7.
Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ telle que $A^3 + 3A^2 = I_3$

Montrer que A est une matrice inversible et déterminer son inverse.

Proposition 1.
Si A est inversible, alors $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Exemple 8.
Démontrer la proposition précédente.

Proposition 2.
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice inversible. On peut alors calculer A^{-1} par :
$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^{t}B$ avec $B = (b_{ij})$ la matrice définie par $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$. B est appelée la matrice des cofacteurs.

Exemple 9.

- Calculer la matrice inverse de : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- Vérifier la propriété précédente en complétant les matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \ldots$$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^{t}B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$${}^{t}B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^tB = \begin{pmatrix} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\det(A)}A^tB = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Propriété 4.
Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ supposées toutes deux inversibles alors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Exemple 10.
Démontrer la propriété précédente.

Propriété 5.
Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$

Exercices TD 1-2

Exercice 1.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Exprimer ${}^tA$.

Exercice 2. On se propose d'étudier la puissance nième de $M = \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

On suppose que M^n peut s'écrire sous la forme : $M^n = \begin{pmatrix} u_n & -u_n \\ -v_n & v_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, a et b ; puis v_{n+1} en fonction de v_n, a et b.
2. En déduire l'expression de M^n en fonction de n, a et b.
3. Application numérique : $M = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence : $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geqslant 3$.
3. Montrer que : $A^n = 3^n I + 3^{n-1} nN + 3^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2}N^2$.
4. En déduire a_n, b_n, et c_n en fonction de n.

Exercice 4.

1. Vérifier sur les matrices carrées d'ordre 2 que Tr AB = Tr BA. (On peut montrer, que ce résultat est vrai pour toutes les matrices A et B telles AB et BA existent).
2. Montrer que la trace est une forme linéaire sur l'ensemble des matrices carrées de dimension n.

Exercice 5.
Calculer, si possible, la matrice inverse de chacune des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.
Démontrer la propriété du cours :

Le déterminant d'une matrice qui a deux colonnes proportionnelles ou deux lignes proportionnelles est nul.

Exercice 7.
Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

On admet que $M^3 + 2M^2 - M - 2I_3 = O$.

Montrer alors que M est inversible et calculer son inverse.

Exercice 9.
On dit que deux matrices A et B sont semblables si il existe une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}BP$.

1. Montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant.
2. Montrer de deux façons différentes que si A est inversible alors B est aussi inversible.