MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES

Objectifs

- **Connaître le lien entre matrices et applications linéaires**
- **Savoir calculer une matrice de passage**
- **Savoir utiliser les formules de changement de bases**
- **Savoir calculer le rang d'une matrice.**

1 Matrice d'une famille de vecteurs

1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathbf{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Définition 1.
Soit $u \in E$. On appelle matrice de u dans la base $\mathbf{B}$ la matrice colonne notée X_B ou $M_{\mathbf{B}}(u)$. $X_B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et les coefficients sont les coordonnées de u dans la base $\mathbf{B}$.

Ainsi si $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, alors : $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Remarque 1.
Attention :

Soit u un vecteur de E. Pour chaque base de E, on associe un vecteur colonne à u, et comme il y a une infinité de bases, à un unique vecteur u on peut donc associer une infinité de matrices colonnes.

Définition 2.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathbf{B}$, la matrice notée $M_{\mathbf{B}}(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est la matrice colonne définissant le vecteur u_j dans la base $\mathbf{B}$ c'est à dire $M_{\mathbf{B}}(u_j)$, pour tout j compris entre 1 et p.

Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, écrivons u_j : $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = a_{1j} e_1 + \cdots + a_{nj} e_n$

Ainsi on a :

$$M_{\mathbf{B}}(u_1, \dots, u_p) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Attention, on retiendra que dans la matrice d'une famille de vecteurs, les coordonnées de chaque vecteur sont rangées en **colonnes**.

Exemple 1.

1. Soit $u(1,2,3)$ et $v(-2,-7,2)$ dans la base $B=(i,j,k)$. écrire la matrice de la famille (u,v) dans la base B.
2. Quelle est la matrice de la base $\mathbf{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ dans la base B ?

Vidéo : Exemple 1

2 Expression analytique d'une application linéaire

On donne ici deux espaces vectoriels E et F, de dimensions respectives p et n. On note $\mathbf{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ une base de E et $\mathbf{C}=(f_1,\ldots,f_n)$ une base de F.

Soit f une application linéaire de E dans F.

Définition 3.
Soient $u\in E$, $X=(x_1,x_2,...,x_p)$ les coordonnées de u dans la base $\mathbf{B}$ et $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ les coordonnées de $f(u)$ dans la base (C). On appelle expression analytique de f l'application g de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$g(x_1,x_2,x_3,...,x_p)=(y_1,y_2,...,y_n)$$

Exemple 2.

1. *Déterminer l'application linéaire f à partir de l'expression analytique g :*
   Soit E un espace vectoriel de base (e_1,e_2,e_3) , et F un espace vectoriel de base (f_1,f_2), et g l'expression analytique d'une application linéaire de E dans F.
   (a) Donner les ensembles de départ et d'arrivée de g
   (b) On admet que $g(x,y,z)=(2x+3y,x+z)$.
   Calculer $g(-1,2,3)$.
   Vidéo : Exemple 2 1)a) et b)
   (c) Déterminer f en déterminant l'image de la base de E dans la base de F par f.
   Vidéo : Exemple 2 1)c)
2. *Déterminer l'expression analytique g à partir de l'application linéaire f :*
   Soit E un espace vectoriel de base $B=(e_1,e_2)$, F un espace vectoriel de base $C=(f_1,f_2,f_3)$, et f l'application linéaire définie par $f(e_1)=2f_1+f_3$ et $f(e_2)=-f_1+f_2$.
   (a) Calculer $f(u)$ avec $u(-2,3)$ dans la base (e_1,e_2).
   (b) Déterminer l'expression analytique de f dans les base B et C.
   Vidéo : Exemple 2 2)

Nous venons de voir deux méthodes pour définir f à l'aide des bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$:

— En donnant l'expression analytique de f, c'est à dire donner les coordonnées de $f(u)$ en fonction des coordonnées de u.
— En donnant l'image d'une base de E.

Ces deux méthodes précédentes sont équivalentes. Nous allons présenter ci-dessous une troisième méthode qui utilise les matrices.

3 Matrice d'une application linéaire

Définition 4.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle matrice de f dans les bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, la matrice notée $M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie comme la matrice dans la base $\mathbf{C}$ de la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_p))$. Ainsi on a :

$$M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f) = M_{\mathcal{C}}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, si on écrit les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathbf{C}$:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i = a_{1j} f_1 + \dots + a_{nj} f_n$$

On a alors :

$$M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

La détermination pratique de la matrice de f s'effectue facilement lorsque l'on connait l'image de la base de E, en disposant ces coordonnées en **colonnes** dans la matrice $M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f)$:

Exemple 3.

1. Déterminer la matrice de f dans le 2) de l'exemple précédent.
2. Soit f de matrice A dans des bases B et C telle que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Déterminer les dimensions de E et F ainsi que l'image de la base B.
3. Vérifier avec la question 1) que les coefficients de l'expression analytique peuvent être lues en ligne dans la matrice.

Vidéo : Exemple 3

Remarque 2.
Dans le cas particulier où $E = F$ c'est à dire que u est un endomorphisme, on prend en général la même base c'est à dire $\mathbf{C} = \mathbf{B}$. On a alors une matrice carrée d'ordre p représentant u que l'on note plus simplement $M_{\mathbf{B}}(u)$.

Exemple 4.
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et on considère la rotation r d'axe Oz et d'angle $\frac{\pi}{2}$. écrire $M_{\mathcal{B}}(r)$

Vidéo : Exemple 4

Théorème 1.
Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, munis de bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$.
On a :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in \mathbb{K}, M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f + \lambda g) = M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f) + \lambda M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(g)$$

4 Lien entre image d'un vecteur, matrices et applications linéaires

Théorème 2.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, munis des bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $u \in E$ et $v = f(u)$. On note $X = M_{\mathbf{B}}(u)$, $Y = M_{\mathbf{C}}(v)$ et $A = M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f)$. Alors on a :

$$v = f(u) \Leftrightarrow Y = AX$$

La matrice de f permet donc aussi de calculer les coordonnées dans $\mathbf{C}$ de $f(u)$, si u est un vecteur de E dont on connaît les coordonnées.

Exemple 5.
Soit f de matrice A dans des bases B et C telle que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Déterminer les dimensions de E et F ainsi que l'expression analytique de f dans les bases B et C.

Vidéo : Exemple 5

On s'aperçoit que l'on lit dans les lignes de la matrice, les coefficients des coordonnées de $f(u)$.

Exemple 6.
Prenons $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ munies de leurs bases canoniques respectives $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ et f définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \mapsto (x + z, x + y, 2y + z, x + 3y + 2z) \end{cases}$$

Écrire la matrice $M_{\mathbf{B},\mathbf{D}}(f)$.

Vidéo : Exemple 6

4.1 Composée d'applications linéaires

Exemple 7.
On considère les applications linéaires :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (y, -x + y, x - 2y) \end{cases} \quad \text{et } g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, z) \end{cases}$$

1. Déterminer les matrices respectives de f, g et $g \circ f$ dans les bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à partir de leur expression analytique.
2. Calculer $M(g)M(f)$. Que remarquez vous ?

Vidéo : Exemple 7

La relation précédente se généralise de la façon suivante :

Théorème 3.
On donne trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels D, E, F de dimensions respectives q, p, n munis des bases respectives $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Soient $f : D \to E$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires. Alors on a :

$$M_{\mathbf{A},\mathbf{C}}(g \circ f) = M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(g)M_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f)$$

Exemple 8. Démontrer ce théorème.

Vidéo : Exemple 8

4.2 Matrice d'automorphisme

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathbf{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Théorème 4.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = M_{\mathbf{B}}(f)$. Alors M est une matrice inversible si et seulement si f est un automorphisme de E. On a alors dans ce cas $M_{\mathbf{B}}(f^{-1}) = M^{-1}$.

Exemple 9.

1. Démontrer le théorème précédent à l'aide du théorème 2.
2. Soit f un endomorphisme de matrice M dans une base B. f est-il un automorphisme ?
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vidéo : Exemple 9

4.3 Application aux matrices de vecteurs

Proposition 5.
Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E avec E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans une base.

$$\mathcal{F} \text{ est une base si et seulement si } \mathbf{A} \text{ est inversible.}$$

Exemple 10.
Démontrer la proposition précédente en introduisant un endomorphisme f tel que l'image d'une base de E est $\mathcal{F}$.

Vidéo : Exemple 10

5 Matrice de passage et changement de base

5.1 Matrice de passage

On donne E un espace vectoriel de dimension n.

Définition 5.
Soient $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathbf{B}$ à $\mathbf{B}'$ la matrice de la famille des vecteurs de $\mathbf{B}'$ exprimés dans la base $\mathbf{B}$. On la note $P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}$ ou tout simplement P quand il n'y a pas de confusion possible. Ainsi, d'après ce qui précède, on détermine donc $P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}$ en écrivant les vecteurs de la base $\mathbf{B}'$, relativement aux vecteurs de la base $\mathbf{B}$ en **colonne**.

Exemple 11.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathbf{B}$. Soit $\mathbf{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (1,-1,0)$, $f_3 = (2,1,1)$. Montrer que $\mathbf{B}'$ est une base et exprimer $P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}$.

Vidéo : Exemple 11

Proposition 6. Propriétés des matrices de passage

1. Si $\mathbf{B}$ est une base de E alors $P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} = I_n$
2. Soient $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{B}''$ trois bases de E. Alors : $P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}''} = P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}P_{\mathbf{B}'\to\mathbf{B}''}$
3. Soient $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ deux bases de E alors la matrice de passage $P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}$ est inversible et on a : $P^{-1}_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'} = P_{\mathbf{B}'\to\mathbf{B}}$

Exemple 12.
Soit $B = (i, j, k)$ et $B' = (u, v, w)$ une base de E. La matrice de passage de B à B' est égale à
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exprimer les vecteurs de la base B en fonction de ceux de la base B', et les vecteurs de la base B' en fonction de ceux de la base B.

Vidéo : Exemple 12

Exemple 13. Démontrer le théorème précédent.

Vidéo : Exemple 13

5.2 Formules de changement de bases

On va dans ce paragraphe, utiliser les matrices de passage pour déterminer des formules de changement de base pour les vecteurs et les applications linéaires, ce qui est un travail essentiel en mathématiques comme en physique.

5.3 Changement de base pour un vecteur

Proposition 7.
Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni de deux bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ et soit $P = P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}$. Soit $u \in E$ et on note $X = M_{\mathbf{B}}(u)$ et $X' = M_{\mathbf{B}'}(u)$. On a alors la formule fondamentale :

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$$

Remarque 3.
On exprime donc les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

Exemple 14.
En reprenant l'exemple ci-dessus, exprimer les coordonnées dans $\mathbf{B}'$ du vecteur $x = (1, 2, 3)$.

Vidéo : Exemple 14

5.4 Changement de bases pour une application linéaire

Théorème 8.
Soit E un espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$. On note $P = P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}$. Soit f un endomorphisme de E, on note $M = M_{\mathbf{B}}(f)$ et $M' = M_{\mathbf{B}'}(f)$. On a alors :

$$M' = P^{-1}MP$$

Remarque 4.
Soit E un espace vectoriel de dimension p et F un espace vectoriel de dimension n muni chacun de deux bases, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ pour E et $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ pour F. On note $P = P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}$ et $Q = P_{\mathbf{C}\to\mathbf{C}'}$. Soit f une application linéaire de E dans F et on note $M = M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f)$ et $M' = M_{\mathbf{B}',\mathbf{C}'}(f)$. On a alors :

$$M' = Q^{-1}MP$$

Exemple 15.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathbf{B}$. Soit $\mathbf{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 = (-1, 2, 0)$, $f_2 = (1, -1, 0)$, $f_3 = (-2, 3, 1)$. On admet que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que : $u : (x, y, z) \mapsto (-3x - 2y - 4z, 4x + 3y + 5z, 2z)$.
   (a) Déterminer $A = M_{\mathbf{B}}(f)$.
   (b) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathbf{B}'$.
   (c) En déduire A^{2009}.

Vidéo : Exemple 15

6 Rang d'une matrice

6.1 Lien avec les applications linéaires

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

Définition 6.
Notons $C_1(M), C_2(M), ..., C_p(M)$ les colonnes de M, alors appelle rang de M le rang de la famille des vecteurs $(C_1(M), C_2(M), ...C_p(M))$. On le note $\mathrm{rg}(M)$.

Remarque 5.
On a toujours : $0 \leqslant \mathrm{rg}(M) \leqslant \min(n, p)$

Théorème 9.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n munis des bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $M = M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f)$. Alors $rg(f) = rg(M)$.

Exemple 16.
Démontrer ce théorème.

Vidéo : Exemple 16

Proposition 10.
$\text{rg}(M) = m$ si et seulement si la famille des vecteurs colonnes $(C_1(M), \ldots, C_m(M))$ est une famille libre et aucune famille de $m+1$ vecteurs colonnes n'est libre.

Remarque 6.
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(M) = n$.

6.2 Recherche pratique du rang d'une matrice

On dit que la matrice $B = (b_{ij})$ est échelonnée en lignes (respectivement échelonnée en colonnes si ${}^tB$ est échelonnée en lignes), si et seulement si il existe un entier $r \in \{1, \ldots, n\}$ et une suite strictement croissante d'indices $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant p$ vérifiant :

- si $1 \leqslant i \leqslant r, b_{ij_i} \neq 0$ et $b_{ij} = 0$ pour $j < j_i$.
- Si $i > r$, $b_{ij} = 0$ pour tout j.

Exemple 17.
La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en ligne. Ici $r = 4$.

Vidéo : Exemple 17

La méthode pour rechercher le rang est due à Gauss. Elle ressemble à la méthode de Gauss-Jordan, on utilise d'ailleurs les mêmes notations. On part donc d'une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Par transformation successive, sur les lignes , on transforme la matrice A en une matrice échelonnée du type de B ci-dessus, c'est à dire une matrice où il apparait au final une matrice carrée nulle. Alors on a :

Proposition 11. Le rang de la matrice A est le même que celui de la matrice B obtenue par transformation successive pour la transformée en matrice échelonnée et on a $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r$ r est donc le nombre de lignes non nulles dans la matrice échelonnée en ligne B. évidemment, si on parle de matrice échelonnée en colonne, r est le nombre de colonnes non nulles dans la matrice échelonnée.

Corollaire 12.
$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$

Exemple 18.
Le rang de la matrice B de l'exemple précédent est donc 4.

Vidéo : Exemple 18

Exemple 19.

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Vidéo : Exemple 19

7 Exercices

Exercice 1.
On rappelle que dans une base donnée, une application linéaires peut être donnée de 3 façons différentes : par l'image de la base, par son expression analytique ou par sa matrice.

Dans chacun des cas suivants, f est une application linéaire de E dans F. Déterminer E et F ainsi que leur dimension, donner les deux autres façons de définir f, et calculer $f(u)$.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x-3y, x+y) \end{cases}$
   et $u = (-1, 2)$.
2. $\text{Mat}_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
   et $u = (-1, 3, 4)$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (2x-y, x+y, x-y) \end{cases}$
   et $u = (-3, 1)$
4. Soit $B = (j, l, n)$ une base de E, et $B' = (a, b)$ une base de F. $f(j) = a-b, f(l) = a+b, f(n) = 2a+b$ et $u = j - l + 2n$.
5. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, y-z) \end{cases}$
   et $u = (1, -1, 2)$.

Exercice 2.
On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice des applications suivantes dans la base $\mathcal{B}$.

1. s la symétrie orthogonale d'axe Ox.
2. p est la projection sur Ox parallèlement à la droite d'équation $y = x$.
3. r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$

1. Trouver une condition pour que les trois vecteurs $u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 \begin{pmatrix} 2b \\ c \\ c \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3.

3. En déduire la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 4.
Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base d'un espace vectoriel E. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3, \phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs (f_1, f_2, f_3) forment-ils une base de E ?
3. Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application ϕ.

Exercice 5.
Soit $B = (a, b, c)$ une base de E, et u, v et w 3 vecteurs de E de coordonnées respectives (-1,1,2), (1,0,1) et (-2,1,0) dans la base B. Donner deux méthodes pour montrer que (u, v, w) est une base de E.

Exercice 6.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer qu'il existe une base $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux 1, 2 et 3.

Exercice 7.
Soit f un endomorphisme ayant pour matrice M dans une base $\mathcal{B}$ et M' dans une base $\mathcal{B}'$, avec $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer une base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Exercice 8.
Soit f un endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = (i, j)$. Soit $u = i + 2j$ et $v = -i + 3j$ et $\mathcal{B}'$ la base (u, v). Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

1. Déterminer P et P^{-1}.
2. Exprimer i et j en fonction de u et v.
3. Donner les coordonnées de $w = 2i + 3j$ dans la base (u, v).
4. Donner les coordonnées de $f(w)$ dans la base B, puis ses coordonnées dans la base (u, v).
5. Déterminer la matrice de f dans la base B', puis retrouver les coordonnées de $f(w)$ dans la base (u, v).
6. Reprendre les questions 4) et 5) dans le cas général, c'est à dire en utilisant uniquement les lettres suivantes : M, la matrice de f dans une base B, M' la matrice de f dans une base B', P, la matrice de passage de B à B', et X la matrice d'un vecteur w dans la base B.

Exercice 9.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = f^2(e_3)$, $e'_2 = f(e_3)$ et $e'_3 = e_3$.

1. (a) Montrer que A est nilpotente d'indice 3.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base et déterminer $M = M_{\mathcal{B}'}(f)$.
   (c) f est elle bijective ?

2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $g(e_1) = e'_1$, $g(e_2) = e'_2$ et $g(e_3) = e'_3$.
   (a) Donner la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que g est une symétrie, c'est à dire que $g \circ g = Id$.
   (c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, résoudre le système $(B - I)X = 0$.
   (d) En déduire $\text{Ker}(g - Id)$. Que représente-il pour la symétrie g ?
   (e) De la même manière déterminer $\text{Ker}(g + Id)$. Que représente-il pour la symétrie g ?

Exercice 10.

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Soit $i = (1; 1; 1)$ $\quad j = (0; 1; 0)$ $\quad k = (1; 0; 0)$, montrer que (i, j, k) est une base de $\mathbb{R}^3$, et exprimer la matrice B de f dans cette nouvelle base, en fonction de la matrice de passage.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, calculer B^n (on décomposera $B = \alpha I_3 + J$, telle que J soit nilpotente). En déduire A^n en fonction de I et J.

Exercice 11.

soit $E = \mathbb{R}^3$, B la base canonique de E et $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ une autre base de E telle que :

$$\begin{cases} e_1 = i + j - k \\ e_2 = i - j + k \\ e_3 = -i + j + k \end{cases}$$

Soit f l'application linéaire de E dans E telle que $\begin{cases} x' = 3x - 2y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + 3y - 2z \end{cases}$

1. Donner la matrice A de f dans la base B.
2. Donner la matrice de passage P de B à B'.
3. Quels sont les coordonnées de $u = (1, 2, 3)$ dans B'.
4. Donner la matrice A' de f dans la base B' en fonction des matrices précédentes.

Exercice 12.

Soit $A = \begin{pmatrix} -2i & -2i & 1 \\ 2 + 2i & 1 + 2i & -1 + i \\ 1 + 2i & 1 + i & -1 \end{pmatrix}$ On note $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

1. On pose $f_1 = (1, -1, 0), f_2 = (0, -i, 1), f_3 = (1, -1, i)$. Montrer que $\mathbf{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Déterminer la matrice de passage $P = P_{\mathbf{B} \to \mathbf{B}'}$.

   On admet que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ i & i & 0 \\ -1 & -1 & -i \end{pmatrix}$
2. Par quelle formule peut-on calculer la matrice A' de u dans $\mathbf{B}'$?

   On admet que $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Déduire de ce qui précède que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Déterminer les coordonnées dans $\mathbf{B}'$ de $u(e_1 - e_2 + e_3)$.

Exercice 13.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par : $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$

1. Montrer que B' est une base de E et former $D = M_{B'}(f)$
2. Exprimer la matrice de passage P de B à B' et calculer P^{-1}.
3. Quelle est la relation reliant A, D, P et P^{-1} ?
4. Exprimer A^{2009} en fonction des matrices précédentes.

Exercice 14.

Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 5 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 11 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 15. Exercice bilan.

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$M = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. On appelle $\mathcal{B}'$, la base de $\mathbb{R}^3$, formée des vecteurs engendrant $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ que l'on note P ainsi que son inverse. Que représente P^{-1}. En déduire l'expression des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ en fonction de ceux de la base $\mathcal{B}'$.
4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait d'après 2. que $\exists! \, (u_1, u_2) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$ tel que $u = u_1 + u_2$. On appelle p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à u associe u_2. Montrer que p est linéaire.

5. Calculer $p(\overrightarrow{i}), p(\overrightarrow{j}), p(\overrightarrow{k})$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}'$.
6. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On la note A.
7. En déduire qu'il existe α un réel tel que $f = \alpha p$.
8. Montrer que $p \circ p = p$. En déduire que $p^n = p$.
9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = \alpha^n p$