LES SUITES

Objectifs

- **Connaître les définitions générales.**
- **Savoir calculer une limite.**
- **Connaître les théorèmes généraux de convergence.**
- **Étudier une suite récurrente d'ordre 1 et d'ordre 2.**

1 Définitions générales

1.1 Définitions d'une suite

Définition 1.
Une **suite** de nombres réels (ou plus simplement une suite réelle) est une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On dit que u_n est le **terme général** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En d'autres termes, donner une suite réelle revient donc à donner une application :

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ &n \mapsto u_n \end{aligned}$$

Remarque 1.
Pour des raisons de commodité, le terme général u_n n'est parfois défini qu'à partir d'un certain rang n_0. On note alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Dans tout ce chapitre, tout ce qui est définie à partir de 0 est facile à transposer pour n_0.

Définition 2.
Soit P une propriété portant sur les suites réelles. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait P **à partir d'un certain rang** si et seulement s'il existe un entier naturel n_0 tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ satisfait la propriété P.

Vidéo : Terme d'une suite

Les suites étudiées dans ce chapitre, sont définies de deux façons différentes :

1. Chaque terme est défini à partir des termes précédents, c'est à dire (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et par un premier terme u_{n_0}.
   On étudiera dans le détail ces suites au paragraphe 5.
2. Chaque terme est défini à partir de son rang, c'est à dire $u_n = f(n)$ pour $n \geqslant n_0$.

Exemple 1.
Calculer u_1 u_2 et u_3 pour chacune des deux suites suivantes :

1. Pour $n \geqslant 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ et $u_0 = 1$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$

Vidéo : Correction exemple 1

1.2 Raisonnement par récurrence

Soit n un entier et $P(n)$ une propriété. Si :

— Initialisation : Il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie.

— Hérédité : pour tout entier $m \geqslant n_0$, $P(m)$ vraie implique que $P(m+1)$ est vraie.

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 2.

Montrer par récurrence que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Vidéo : Correction exemple 2

1.3 Suites arithmétiques et suites géomètriques.

1.3.1 Suites arithmétiques

Définition 3. Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite **arithmétique** de raison r est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par le premier terme u_p est la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors :

$$\forall n \geqslant p, u_n = u_p + (n-p)r$$

Propriété 1. Somme des termes consécutifs
La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à

$$\textit{nombre de termes}\ \frac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}$$

Cas particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1.3.2 Suites géométriques

Définition 4. Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Une suite **géométrique** de raison q est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par le premier terme u_p est la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$$

On a alors :

$$\forall n \in\geqslant p, u_n = u_p q^{n-p}$$

Propriété 2. Somme des termes consécutifs
La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique dont la raison est différente de 1 est égale à

$$\textit{premier terme}\ \frac{1 - raison^{\textit{nombre de termes}}}{1 - raison}$$

Cas particulier : Si $q \neq 1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

1.4 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 5.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si et seulement s'il existe un réel M vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si et seulement s'il existe un réel m vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$
3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple 3. Les suites suivantes sont-elles minorées, majorées ou bornées ?

1. $u_n = \dfrac{1}{n}, n > 0$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 3}$
3. $u_n = (-1)^n \cos(n)$.

Vidéo : Correction exemple 3

Remarque 2.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, c'est à dire si et seulement s'il existe un réel $M \geqslant 0$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$
Cette propriété très utilisée a en plus le mérite de pouvoir être utilisée avec les suites complexes.

2 Sens de variation

Définition 6.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) à partir du rang n_0 si et seulement si on a : $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant u_{n+1}$ (respectivement $\forall n \geqslant n_0, u_n < u_{n+1}$)
2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) à partir du rang n_0 si et seulement si on a : $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant u_{n+1}$ (respectivement $\forall n \geqslant n_0, u_n > u_{n+1}$)
3. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** (respectivement **strictement monotone**) à partir du rang n_0 si et seulement si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante) à partir du rang n_0.

4. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si et seulement si on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemple 4. Étudier la monotonie des suites suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Propriété 3.
Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs à partir d'un certain rang n_0, il est parfois utile d'utiliser la forme équivalente suivante de la définition :

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n_0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

Exemple 5. Étudier la monotonie des suites suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$

Propriété 4.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ et soit n_0 un entier. Si f est croissante (respectivement décroissante) sur $[n_0; +\infty[$ alors (u_n) est croissante (respectivement décroissante) à partir du rang n_0.

Exemple 6. Étudier la monotonie de la suite suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 10n + 21$

Point méthode pour étudier les variations d'une suite
D'après la définition, et la propriété précédente, on dispose donc de 3 méthodes :

— Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
(Cette méthode peut s'appliquer pour toutes les suites mais il est parfois plus simple d'utiliser une des deux méthodes ci-dessous).

— Comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
(Cette méthode ne peut s'utiliser que pour des suites strictement positives à partir d'un certain rang. Il faut donc le préciser lorsque l'on utilise cette méthode).

— Etudier les variations de f, lorsque le signe de f' se détermine facilement.
(Cette méthode ne peut s'utiliser que pour les suites de la forme $u_n = f(n)$).

Propriété 5. Monotonie des suites géomètriques
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Variation de la suite (u_n) :

	$q < 0$	$0 < q < 1$	$q = 1$	$1 < q$
$u_0 < 0$	Pas monotone	Croissante	Constante	Décroissante
$u_0 > 0$	Pas monotone	Décroissante	Constante	Croissante

Exemple 7. Déterminer le sens de variations des suites suivantes :

1. $u_{n+1} = 0.3u_n \quad u_0 = 2$
2. $u_{n+1} = 1.3u_n \quad u_0 = -2$
3. $u_{n+1} = -1.3u_n \quad u_0 = -2$

3 Convergence d'une suite

3.1 Limite finie d'une suite

Définition 7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers l et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 8.
Donner un exemple de suite qui converge vers e.

Remarque 3.
La manière dont N dépend de ε caractérise ce que l'on appelle la **vitesse de convergence** de la suite. Pour ε fixé, plus N est proche de 0, plus la vitesse de convergence est rapide.

Définition 8.
Soit x_0 et a deux réels. On dit que a est une valeur approchée de x_0 à ε près si :
$|x_0 - a| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 4.
Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l \Leftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$, u_n fournit à partir d'un certain rang une valeur approchée de l à la précision ε.

Les suite numériques sont donc utilisées pour trouver des valeurs approchées de réels dont on ne peut calculer les valeurs exactes.

Propriété 6.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\to} |l|$

Proposition 1.
Toute suite convergente est bornée.

Vidéo : Démonstration de la proposition précédente non exigée

3.2 Limite infinie d'une suite

Définition 9.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ (respectivement $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$) si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$$

(respectivement $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A$).

Définition 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente, c'est à dire si la limite n'existe pas ou si elle est infinie.

Exemple 9.
Donner deux exemples de suites qui divergent.

3.3 Propriétés des limites

3.3.1 Limites et opérations

On peut réutiliser ici, tous les tableaux des limites pour les fonctions.

3.3.2 Limites et inégalités

Théorème 2. Passage des inégalités à la limite
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels l et l'. On suppose qu'il existe un certain rang n_0 à partir duquel $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant u'_n$, alors $l \leqslant l'$.

Exemple 10.
Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n < v_n$ à partir d'un rang n_0 et telles que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

Théorème 3. Théorème des gendarmes
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et l un réel. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ et on suppose qu'il existe un certain rang n_0 à partir duquel $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$

Théorème 4. Théorème de comparaison

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose : $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et on suppose qu'il existe un certain rang n_0 à partir duquel $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose : $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ et on suppose qu'il existe un certain rang n_0 à partir duquel $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$

Exemple 11.

— Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \geqslant 1, u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge vers 1.

— Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$

3.3.3 Limite d'une suite et fonction continue

Théorème 5.
Si f est continue en a, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple 12.
Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}$

3.3.4 Limite des suites géometriques

Propriété 7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géometrique de raison $q \neq 0$ avec $u_0 \neq 0$.

1. si $|q| < 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
2. si $q = 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u_0$ (la suite est constante)
3. si $q > 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{cases} +\infty\, si\, u_0 > 0 \\ -\infty\, si\, u_0 < 0 \end{cases}$

4. si $q \leqslant -1$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Exemple 13. Déterminer les limites suivantes :

1. $u_{n+1} = 0.3u_n \quad u_0 = 2$
2. $u_{n+1} = 1.3u_n \quad u_0 = -2$
3. $u_{n+1} = -1.3u_n \quad u_0 = -2$

3.3.5 Convergence des suites monotones

Théorème 6. Théorème de la limite monotone

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à partir d'un rang n_0. Si cette suite est majorée, alors elle est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$

   Si elle n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à partir d'un rang n_0. Si cette suite est minorée, alors elle est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$

   Si elle n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$

Exemple 14.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$. On admet que (u_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier que $u_n \leqslant \frac{\pi^2}{6}$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3}$. Étudier la convergence de la suite (v_n).

Vidéo : Correction exemple 11

3.3.6 Limite des suites adjacentes

Définition 11.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que ces suites sont **adjacentes** si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. Elles sont monotones et de sens de variations opposés.
2. $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Théorème 7. Convergence
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors elles sont convergentes et ont la même limite. De plus leur limite commune est comprise pour tout n entre u_n et v_n.

Exemple 15.
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Leur limite commune est le nombre e. Nous le démontrerons l'an prochain.

Vidéo : Correction exemple 12

3.3.7 Limite des suites extraites

Définition 12.
La suite (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = u_{\varphi(n)}$

Dans la pratique, nous utiliserons beaucoup les suites extraites d'indices pairs et impairs c'est à dire les sous-suites : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 8.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} l$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} l$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$

Exemple 16.
Étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Vidéo : Correction exemple 13

Théorème 9.
Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Remarque 5.
On peut utiliser la contraposée du théorème précédent pour démontrer qu'une suite (u_n) n'est pas convergente :

- d'exhiber une suite extraite non convergente.
- ou d'exhiber deux suites extraites convergeant vers des limites différentes.

Exemple 17.
Nature de la suite (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$.

Vidéo : Correction exemple 14

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

(Cette partie 4 est donnée pour information et ne sera pas évaluée)

Théorème 10. Suites récurrentes doubles
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

a et b étant des réels.

On appelle **équation caractéristique**, l'équation (EC) : $x^2 - ax - b = 0$. On considère les deux solutions α et β de cette équation :

- Si α et β sont deux réels distincts, c'est à dire $\Delta = a^2 + 4b > 0$, il existe alors deux constantes réelles A et B telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\alpha^n + B\beta^n$$
- Si α et β sont deux réels égaux, c'est à dire $\Delta = a^2 + 4b = 0$, il existe alors deux constantes réelles A et B telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)\alpha^n$$

— Si α et β sont deux complexes conjugués, c'est à dire $\Delta = a^2 + 4b < 0$, ils peuvent donc être écrits : $\alpha = \rho e^{i\theta}$ et $\beta = \rho e^{-i\theta}$. Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$$

Dans chaque cas, les constantes A et B sont obtenues en résolvant un système de deux équations à deux inconnues en fonction de u_0 et u_1.

Exemple 18.
On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = u_1 = 1$ est la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Donner une expression de u_n en fonction de n.

Vidéo : Correction exemple 15

5 Suites récurrentes réelles $u_{n+1} = f(u_n)$

5.1 Définition

Exemple 19. 1. Représenter la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{2x-4}$ pour $x \in [2\,;\,6]$, et la droite d'équation $y = x$.

2. Discuter, suivant la valeur de u_0, l'existence de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ à l'aide du graphique.
3. Soit $I = [4; +\infty[$. Montrer que si $u_0 \in I$ alors la suite (u_n) est bien définie.

Vidéo : Correction exemple 16 question 1) et 2)
Vidéo : Correction exemple 16 question 2)
Vidéo : Correction exemple 16 question 3

Propriété 8.
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. La suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ est définie si $f(I) \subset I$, et on a alors $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans toute la suite du paragraphe, on considère :

— I un intervalle de $\mathbb{R}$.

— f une fonction telle que $f(I) \subset I$.

— Une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.

5.2 Sens de variation

Propriété 9.
Si f est croissante sur I, alors (u_n) est une suite monotone :

— croissante si $f(u_0) \geqslant u_0$ i.e. si $u_1 \geqslant u_0$.

— décroissante si $f(u_0) \leqslant u_0$ i.e. si $u_1 \leqslant u_0$.

Exemple 20.
Démontrer la propriété ci-dessus.

Vidéo : Correction exemple 17

Remarque 6. Dans le cas où la fonction f est décroissante sur I alors la suite (u_n) n'est pas monotone : en effet supposons par exemple que $u_1 \geqslant u_0$ comme f est décroissante sur I nous obtenons $f(u_1) \leqslant f(u_0)$ à savoir $u_2 \leqslant u_1$ puis $f(u_2) \geqslant f(u_1)$ à savoir $u_3 \geqslant u_2$, le signe de la différence entre deux termes consécutifs varie.

5.3 Convergence

Propriété 10.
Si I est borné et si f est croissante, alors quel que soit $u_0 \in I$, la suite (u_n) est convergente.

Exemple 21.
Démontrer la propriété ci-dessus.

Vidéo : Correction exemple 18

Propriété 11.
Si f est continue sur I et si (u_n) converge vers $l \in I$, alors $f(l) = l$ i.e. l est un point fixe de f.

Exemple 22.
Démontrer la propriété ci-dessus.

Vidéo : Correction exemple 19

Exemple 23.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans l'exemple 19, c'est à dire $u_0 = 6$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2\sqrt{2x-4}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de (u_n).
3. En utilisant les diférentes propriétés ci-dessus, montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Vidéo : Correction exemple 20

Remarque 7. Exemple : cherchons une solution de l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^4 + 3x + 1$.

On montre que f est strictement croissante et continue sur [-1 ;0], que $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $x_0 \in]-1;0[$ tel que $f(x_0) = 0$.

On peut aussi montrer que les deux suites suivantes convergent vers x_0 :

— Méthode de Lagrange : $u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n^3 + 3}$ et $u_0 = -1$

— Méthode de Newton : $v_{n+1} = \dfrac{3v_n - 1}{4v_n^3 + 3}$ et $v_0 = 0$

Pour obtenir une valeur approchée de x_0 à 10^{-15} près, il suffit de calculer v_4, alors qu'il faut aller jusqu'à u_{12}. La méthode de Newton est, en général, une méthode qui converge beaucoup plus rapidement que la méthode de Lagrange.

On trouve que -0,337666765642802 est une valeur approchée de x_0 à 10^{-15} près.

6 Comparaison des suites

6.0.1 Suites négligeables

Définition 13.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

On note : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou tout simplement $u_n = o(v_n)$. On dit aussi que u_n est infiniment petit par rapport à v_n et que v_n est infiniment grand par rapport à u_n lorsque $n \to +\infty$.

Propriété 12.
Si(v_n) est non nul à partir d'un certain rang :
$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Exemple 24.

1. Montrer que $n! = o(n^n)$.
2. La suite $(\dfrac{1}{n})$ est-elle négligeable devant la suite $(\dfrac{1}{n^2})$?
3. La suite $(1,1^n)$ est-elle négligeable devant la suite (n^{1000}) ?

Vidéo : Correction exemple 21

6.0.2 Suites équivalentes

6.0.3 Définition

Définition 14.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si on a : $u_n - v_n = o(v_n)$. On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

On dit également que u_n est un équivalent de v_n.

Ainsi, une caractérisation simple de l'équivalence, lorsque les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nuls à partir d'un certain rang est :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

Remarque 8. Attention Danger !
Ne pas confondre les propriétés $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n - v_n \to 0$. Il n'existe aucune relation d'implication entre elles deux. En effet :

— Prenons $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \neq 1 \Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\nsim} v_n$

— Prenons $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} = 1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Rightarrow u_n \sim v_n$. Et pourtant : $u_n - v_n = n$ ne tend pas vers 0 !

6.0.4 Recherche pratique d'équivalents

Pour une suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$, on peut, lorsque cela est possible, trouver un équivalent de u_n à l'aide d'un développement limité de f en $+\infty$.

Exemple 25.

Donner un équivalent simple de $u_n = n \ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$

Vidéo : Correction exemple 22

7 Exercices TD1 à TD5

Exercice 1.
Déterminer les variations et les limites des suites suivantes :

1. $u_n = e^n - 5n$
2. $u_{n+1} = -5u_n$ et $u_0 = 3$.
3. $u_{n+1} = 0,5u_n$ et $u_0 = -3$
4. $u_{n+1} = -0,5u_n$ et $u_0 = -5$.

Exercice 2.
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :
" Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$."
Cocher la ou les affirmation(s) qui sont exactes et justifier votre choix.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :
   - ☐ La suite (w_n) tend vers $-\infty$.
   - ☐ La suite (u_n) est majorée .
   - ☐ La suite (u_n) tend vers$-\infty$.
   - ☐ La suite (w_n) n'a pas de limite.
2. Si $u_n \geqslant 1$, $w_n = 2u_n$ et $\lim u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors
   - ☐ $\lim v_n = l$.
   - ☐ La suite (w_n) tend vers $+\infty$.
   - ☐ $\lim\ (w_n - u_n) = l$.
   - ☐ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
3. Si lim u_n = -2 et lim w_n = 2, alors :
   - ☐ La suite (v_n) est majorée
   - ☐ lim (v_n) =0
   - ☐ la suite (v_n) n'a pas de limite
   - ☐ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$ alors :
   - ☐ lim (w_n)=0
   - ☐ lim (v_n) =2
   - ☐ lim (u_n) = 2

☐ la suite (v_n) n'a pas de limite.

Exercice 3.
Calculer la somme des n premiers nombres impairs.

Exercice 4.
On appelle suite arithmético-géométrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son 1er terme u_0 et par une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux réels fixés.

1. Exprimer u_n en fonction de n lorsque $a = 1$.
2. On suppose $a \neq 1$
   (a) Vérifier que l'équation $\ell = a\ell + b$ admet une unique solution l.
   (b) On pose $w_n = u_n - \ell$. Vérifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (c) Exprimer u_n en fonction de a, b, n, u_0.
   (d) Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de a, b, n, u_0.

Exercice 5.
Conjecturer la valeur de u_n en fonction de n et u_0 ou u_1 pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes puis démontrer par récurrence vos conjectures :

1. $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{n}{2}u_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{n-2}u_n$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
3. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = -\dfrac{n}{n+1}u_n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2^n$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_n)^2$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.
Étudier la convergence et la monotonie de la suite (v_n) définie par : $v_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 7.

1. Montrer que que pour tout k > 0 : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$
2. En déduire la valeur de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
   — Montrer que $v_n \leqslant 1 + u_{n-1}$
   — En déduire que le suite (v_n) est convergente.

Exercice 8.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $u_n = S_{2n}, v_n = S_{2n+1}$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 9.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{3}$
3. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis montrer qu'elle converge vers $\sqrt{3}$

Exercice 10.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Conclure.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Que se passe t-il si on prend $u_0 = 3$?

Exercice 11.
Donner un équivalent des suites ci-dessous sous la forme $\frac{k}{n^\alpha}$:

1. $u_n = (1 + \frac{a}{n})^n$
2. $u_n = \frac{n^2+3}{n^5+1}$
3. $u_n = \frac{\sin(n)+n}{\sqrt{n}+\cos(n)}$
4. L'affirmation suivante est elle vraie ou fausse : $\frac{\ln(n)}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$ car $\ln(n)$ est négligeable devant n^3.

Exercice 12.

1. Montrer que la suite $u_n = \frac{e^{-n}+2}{n^2+1}$ est négligeable devant $\frac{k}{n^\alpha}$ où l'on déterminera les réels k et α.
2. (a) A t'on $\frac{\sin^2(n)}{n^2} = o(\frac{1}{n^3})$?

   (b) Et a t'on $\frac{\sin^2(n)}{n^2} = o(\frac{1}{n^2})$?
3. Montrer que $\frac{\ln(n)}{n^2} = o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$

Exercice 13.
On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbb{R}^{+*}$). Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$. On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k. On étudiera les variations de f et le signe de $f(u0) - u0$ en distinguant les cas où $k \in]0,1]$ et $k \in [1,2]$.