Développements Limités

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
CENTRE VAL DE LOIRE

Fonctions négligeables

Fonctions négligeables

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un réel. $a \in \mathbb{R}$ ou bien a est une borne de I. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a où $a \in [-\infty, +\infty]$, si et seulement si :

1. Cas $a \in \mathbb{R}$:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$
2. Cas $a = +\infty$:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$
3. Cas $a = -\infty$:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

On note $f(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g(x)\right)$ ou, s'il n'y a pas de confusion possible, $f = o(g)$. On dit aussi que $f(x)$ est infiniment petit par rapport à $g(x)$ au voisinage de a.

Fonctions négligeables

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $f(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g(x)\right)$
2. Si $g \neq 0$ au voisinage de a, $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$
3. Il existe une fonction ε telle que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ au voisinage de a.

Exemples

1. Déterminer tous les entiers n tels que $\frac{x^3}{1+x^2} = o(x^n)$ au voisinage de 0.
2. Soit f une fonction telle que $f(x) = o(x^3)$ au voisinage de 0. Déterminer les entiers n tels que $\frac{f(x)}{x} = o(x^n)$.

Exemples

Au voisinage de 0

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \quad .x^n$$

Exemples

Au voisinage de 0

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \qquad .x^n$$

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x^{3-n}}{1+x^2}.x^n$$

Exemples

Au voisinage de 0

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \quad .x^n$$

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x^{3-n}}{1+x^2}.x^n$$

$$x^{3-n} = e^{(3-n)ln(x)}$$

Exemples

Au voisinage de 0

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \quad .x^n$$

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x^{3-n}}{1+x^2}.x^n$$

$$x^{3-n} = e^{(3-n)ln(x)}$$

$$3-n>0 \Leftrightarrow n<3$$

Exemple

Au voisinage de 0 :

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.x^3$$

Exemples

Au voisinage de 0 :

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.x^2 =$$

Exemples

Au voisinage de 0 :

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.x^2 =$$

$$o(x^2)$$

Exemples

Au voisinage de 0 :

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.x^2 =$$

$$o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2}.x =$$

Exemples

Au voisinage de 0 :

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.x^2 =$$

$$o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2}.x =$$

$$o(x)$$

Exemples

$$= \frac{x^3}{1+x^2}.1$$

Exemples

$$= \frac{x^3}{1+x^2}.1$$

$$o(1)$$

Exemples

Au voisinage de 0 :

$$f(x) = o(x^3) = \epsilon(x)x^3$$

Exemples

Au voisinage de 0 :

$$f(x) = o(x^3) = \epsilon(x)x^3$$

$$\frac{f(x)}{x} = \epsilon(x)x^2$$

Exemples

Au voisinage de 0 :

$$f(x) = o(x^3) = \epsilon(x)x^3$$

$$\frac{f(x)}{x} = \epsilon(x)x^2$$

$$= o(x^2) \quad = o(x) \quad = o(1)$$

.

Remarque

Les propriétés sur la notion de négligeabilité sont les mêmes que celles vues dans le chapitre sur les suites. En particulier, on retrouve le théorème des croissances comparées :
en $+\infty$: $x^\alpha = o(x^\beta)$ ssi $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o(e^x)$, $\ln x = o(x^\beta)$
en 0^+ : $x^\beta = o(x^\alpha)$ ssi $\alpha < \beta$, $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Développements limités au voisinage de 0

Développements limités : Généralités

I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I^o$, $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0, ce que l'on note en abrégé $DL_n(0)$ si et seulement si il existe un polynôme P_n à coefficients réels de degré au plus égal à n, tel que :

$$f(x) - P_n(x) = o(x^n)$$

au voisinage de 0.
Un $DL_n(0)$ de f s'écrit :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

.

Remarque

- Quelle que soit la situation, la quantité $o()$ est une quantité "abstraite" qui tend vers 0 quand x tend vers 0, c'est à dire que les termes qui suivent sont négligeables au voisinage de 0 par rapport aux termes qui les précédent. On ne calculera pas $o()$. $o()$ est l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $P_n(x)$.

Proposition : Unicité de la partie régulière

Le polynôme P_n du $DL_n(0)$ de f est UNIQUE. Ce polynôme est appelé partie régulière du $DL_n(0)$ de f et notée $[f]_n$.

Exemple

Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + 12x^3 + 5x^4$

Exemple

Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + 12x^3 + 5x^4$

$$f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + x^2(12x + 5x^2)$$

Exemple

Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + 12x^3 + 5x^4$

$$f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + x^2(12x + 5x^2)$$

$$= 1 + 3x - 5x^2 + o(x^2)$$

Exemple

Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + 12x^3 + 5x^4$

$$f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + x^2(12x + 5x^2)$$

$$= 1 + 3x - 5x^2 + o(x^2)$$

$$P_2(x) = 1 + 3x - 5x^2$$

Corollaire : Parité

La partie régulière d'une fonction paire est paire et la partie régulière d'une fonction impaire est impaire.

Preuve

Nous nous ramenons d'abord au voisinage de 0, ainsi

$$\forall x \in I, f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$\forall x \in I, f(-x) = P(-x) + o(x^n)$$

et $x \to P(-x)$ est un polynôme de degré $\leq n$.
Si f est paire par unicité du DL(0), $P(-X) = P(X)$ et donc P est pair. De même pour f impaire.

Théorème : Formule d'Euler Mac-Laurin

On suppose ici que $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$, telle que $f^{(n)}(0)$ existe. Alors f admet un $DL_n(0)$ donné par la formule de Mac-Laurin :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] + o\left(x^n\right)$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

Remarque

- Pour que f admette un $DL_0(0)$, il faut et il suffit que f soit continue en 0. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(0) + o(1)$$

- Pour que f admette un $DL_1(0)$, il faut et il suffit que f soit dérivable en 0. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$$

- il existe des fonctions qui ne vérifient pas les hypothèses du théorème de Taylor-Young et qui ont néanmoins un DL pour $n \geq 2$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^3 \sin \frac{1}{x} \ \ si \ \ x \neq 0 \\ 0 \ \ si \ \ x = 0 \end{array} \right.$
Montrer que f admet un $DL_2(0)$, mais que la dérivée seconde de f n'existe pas en 0.

Exemple

f admet un $DL_2(0)$ car :

$$f(x) = (xsin(\frac{1}{x}))x^2 \text{ si } x \neq 0$$

Exemple

f admet un $DL_2(0)$ car :

$$f(x) = (xsin(\frac{1}{x}))x^2 \text{ si } x \neq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = o(x^2)$$

Exemple

f est dérivable en 0 car :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^2 sin(\frac{1}{x})$$

Exemple

f est dérivable en 0 car :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^2 sin(\frac{1}{x})$$

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Exemple

f est dérivable en 0 car :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^2 sin(\frac{1}{x})$$

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\times} f'(x) = 3x^2 sin(\frac{1}{x}) - xcos(\frac{1}{x})$$

Exemple

f est dérivable en 0 car :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x^2 sin(\frac{1}{x})$$

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\times} f'(x) = 3x^2 sin(\frac{1}{x}) - xcos(\frac{1}{x})$$

f n'est pas deux fois dérivable en 0 puisque f' n'est pas dérivable en 0

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = 3xsin(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$$

Exemple

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad v_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}$$

$$cos(\frac{1}{u_n}) = cos(2n\pi) = 0 \quad cos(\frac{1}{v_n}) = cos(\pi + 2n\pi) = -1$$

Exemple

Il se peut donc que f admette un $DL_n(0)$ $n \geq 2$ sans pour autant être deux fois dérivable en 0 d'après l'exemple ci-dessus.

DL en 0 usuels : l'exponentielle

$$f(x) = e^x \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad f^{(k)}(0) = 1$$

DL en 0 usuels : l'exponentielle

$$f(x) = e^x \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad f^{(k)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

DL en 0 usuels : l'exponentielle

$$f(x) = e^x \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad f^{(k)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

DL en 0 usuels : le cosinus

$$f(x) = cos(x)$$

DL en 0 usuels : le cosinus

$$f(x) = cos(x)$$

Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k cos(x)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} sin(x)$$

DL en 0 usuels : le cosinus

$$f(x) = cos(x)$$

Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k cos(x)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} sin(x)$$

Ainsi

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k$$

$$f^{(2k+1)}(0) = 0$$

Raisonnement par récurrence

$\mathcal{P}_0$ est vraie,

Raisonnement par récurrence

$\mathcal{P}_0$ est vraie,
Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie alors en dérivant les expressions obtenues nous avons :

Raisonnement par récurrence

$\mathcal{P}_0$ est vraie,
Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie alors en dérivant les expressions obtenues nous avons :
$f^{(2k)^{'}}(x) = f^{2k+1}(x) = (-1)^k cos^{'}(x) = (-1)^k * (-1) sin(x) = (-1)^{k+1} sin(x)$

Raisonnement par récurrence

$\mathcal{P}_0$ est vraie,
Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie alors en dérivant les expressions obtenues nous avons :
$f^{(2k)^{'}}(x) = f^{2k+1}(x) = (-1)^k cos^{'}(x) = (-1)^k * (-1) sin(x) = (-1)^{k+1} sin(x)$

$f^{(2k+1)^{'}}(x) = f^{2k+2}(x) = (-1)^{k+1} sin^{'}(x) = (-1)^{k+1} cos(x)$

DL en 0 usuels : le cosinus

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$

DL en 0 usuels : le cosinus

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

DL en 0 usuels : le sinus

De même, nous montrerions que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^{k+1} sin(x)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k} cos(x)$$

DL en 0 usuels : le sinus

De même, nous montrerions que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^{k+1} sin(x)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k} cos(x)$$

Ainsi

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k}$$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+1})$$

DL en 0 usuels : le sinus

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

DL en 0 usuels

$$ch(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

DL en 0 usuels

$$sh(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

DL en 0 usuels

$$f(x) = (1 + x)^{\alpha}$$

DL en 0 usuels

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

DL en 0 usuels

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

DL en 0 usuels

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$