LES APPLICATIONS

Objectifs
- **Connaître quelques éléments types des démonstrations.**
- **Connaître la définition d'une application.**
- **Savoir déterminer l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application.**
- **Connaître l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application.**

1 Les applications

Définition 1.
Soient E et F deux ensembles, une application f de E dans F est la donnée d'un procédé (explicite, algorithmique,...), qui à tout élément x de E associe un **unique** élément y noté $f(x)$ de F.

$$f \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

E est appelé ensemble de départ de f et F son ensemble d'arrivée.
Soit x un élément de E ; l'élément $y = f(x)$ est appelé **l'image** de x par f.
Soit $y \in F$, s'il existe un élément x tel que $y = f(x)$ alors x est appelé **antécédent** de y par f.
Attention, il peut exister plusieurs antécédents pour y.
On note $\mathcal{F}(E; F)$, l'ensemble des applications de E dans F.

Les mots "fonctions" et "applications" sont synonymes. L'usage en analyse a cependant voulu que l'on conserve plutôt le premier que le second. Néanmoins dans un souci pédagogique, nous conservons dans ce chapitre le mot "application" en prévision d'un chapitre intitulé "applications linéaires".

Ainsi, une application f c'est la donnée de trois paramètres :
- un ensemble de départ E
- un ensemble d'arrivée F
- un procédé qui associe x à $f(x)$

Si on change l'un de ces trois paramètres, on change alors d'application, même si les deux autres sont identiques. Toutefois, il est fréquent en pratique, que l'ensemble E ne soit pas connu à priori. A partir de $f(x)$, il faut alors déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels elle a un sens. Cet ensemble est appelé **ensemble de définition** ou **domaine de définition**.

Proposition 1.
Pour démontrer que deux applications f et g sont égales il faut vérifier qu'elles ont :
- le même ensemble de départ E
- le même ensemble d'arrivée F
- les mêmes valeurs, c'est à dire : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

Exemple 1.
Si $f : x \mapsto x^2$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto x^2$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $f \neq g$ car les ensemble de départ sont différents.

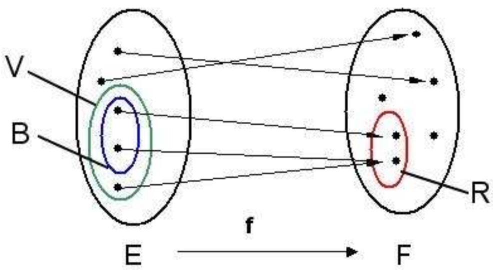
2 Image directe et réciproque

Définition 2.
Soit f une application de E dans F. Si A est une partie de E, on appelle image directe de A par f, le sous-ensemble de F constitué des images par f de tous les éléments de A.
On note $f(A)$ cet ensemble. Ainsi, un élément y de F est dans $f(A)$ si et seulement si il existe x dans A tel que $y = f(x)$. Symboliquement :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) / x \in A\}$$

Dans le cas où $A = E$, alors l'ensemble $f(E)$, image de E par f est dit espace image de f et se note $\operatorname{Im} f$.

Exemple 2.
Déterminer $f(B)$ et représenter $f(E)$.



Définition 3.
Soit f une application de E dans F. Si B est une partie de F, on appelle image réciproque de B par f, le sous-ensemble de E constitué des éléments de E dont l'image est dans B.
On note $f^{-1}(B)$ cet ensemble. Ainsi, un élément x de E est dans $f^{-1}(B)$ si et seulement si son image $f(x)$ est dans B. Symboliquement :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Exemple 3.
Déterminer $f^{-1}(R)$ et représenter $f^{-1}(F)$ dans l'exemple précédent.

Remarque 1. Méthode.
Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$,

1. Pour trouver l'image réciproque d'une partie B de F parf, il suffit de résoudre $f(x) \in B$
2. Pour trouver l'image directe d'une partie A de E par f , il suffit de trouver les éléments $y \in F$ pour lesquels l'équation $(y = f(x) \text{ et } x \in A)$ a au moins une solution.

Exemple 4.
Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1]\cup[-2,1])$ et $f([-3,-1]\cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[)$.
3. Soit E et F deux ensembles, f une fonction de E dans F. Démontrer que pour A et B dans $P(E)$ on a $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$ et démontrer que l'égalité n'est pas vraie.

3 Composition des applications

Définition 4.
Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On note $g \circ f$ l'application de E dans G qui, à tout élément x de E, associe l'élément $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. L'application $g \circ f$ est l'application composée de f par g

Remarque 2.
En général $g \circ f \neq f \circ g$!

Propriété 1.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(G,H), g \in \mathcal{F}(F,G), h \in \mathcal{F}(E,F)$ alors : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
2. Soit $f \in \mathcal{F}(E,E), f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

Exemple 5.
Donner $g \circ f$ et $f \circ g$ avec $E = F = G = \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1, g(x) = 2x - 3$

4 Fonctions surjectives, injectives, bijectives

4.1 Surjection

Définition 5.
Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. On dit que f est surjective ou que f est une surjection si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution,

2. $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$
3. Tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f

En anglais, surjectif se dit "onto", ce qui évoque l'idée d'un recouvrement de l'ensemble d'arrivée par les images de l'application f. Le mot surjection vient d'ailleurs du latin *superjacio* signifiant "jeter par dessus", on jette ici E par dessus F !

Exemple 6.
L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 3x$ est-elle surjective ?

Propriété 2.
Soit f une fonction de E dans F. Alors f est une surjection de E dans $f(E)$.

Exemple 7.
Démontrer la propriété précédente.

4.2 Injection

Définition 6.
Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. On dit que f est injective ou que f est une injection si elle vérifie l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution,
2. $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
3. $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
4. Tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent par f

La caractéristique d'une injection est donc que deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont deux images distinctes dans l'ensemble d'arrivée. En anglais "injective" se dit de façon imagée "one-to-one" (chacun son image).

Propriété 3.
Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle strictement monotone sur I. Alors f est une injection de I vers $\mathbb{R}$.

Exemple 8.

1. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 3x$ est-elle injective ?
2. La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ?

4.3 Bijection

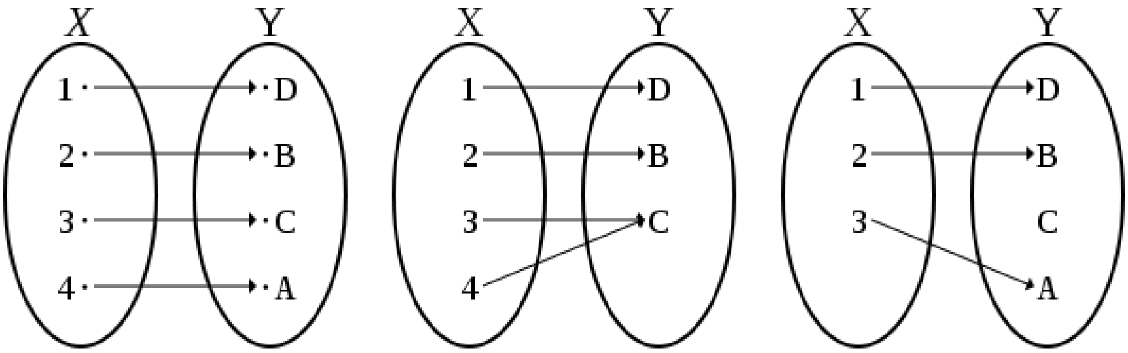
Définition 7.
Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. On dit que f est bijective ou que f est une bijection si elle vérifie l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution,

2. $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$
3. Tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un seul antécédent par f
4. f est injective et surjective

Remarque 3.
En général, une application n'est ni injective, ni surjective.

Exemple 9.
Déterminer l'injection, la surjection, la bijection dans les figures ci-dessous :



Propriété 4.
Soit f une fonction réelle continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est une bijection de I sur f(I)

4.4 Exemples

1. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = e^x$ est injective (continue et strictement croissante) mais n'est pas surjective (aucun réel négatif n'admet d'antécédent)
2. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = \sin(x)$ n'est pas injective car $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ et n'est pas non plus surjective car aucun réel dont la valeur absolue est supérieur à 1 n'admet d'antécédent.

5 Bijection réciproque

Définition 8.
Soit f une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F. L'application réciproque de f, notée f^{-1} est l'application de F vers E, définie pour tout y de F par,
$x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(x)$

Théorème 2.
Si $f \in \mathcal{F}(E, F), g \in \mathcal{F}(F, E)$ sont telles que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$ alors elles sont toutes deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Méthode Pour montrer qu'une application f appartenant à $\mathcal{F}(E, F)$ est bijective et trouver sa réciproque, on peut :

1. Soit exhiber une application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$
2. Soit résoudre l'équation $y = f(x)$ pour montrer qu'elle admet quel que soit $y \in F$, une unique solution $x = f^{-1}(y)$

Exemple 10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.

1. Justifier sans calcul que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la fonction réciproque g de f.
3. Vérifier que g est bien la fonction réciproque de f.

Propriété 5.
Soit f est une fonction bijective d'un ensemble I vers un ensemble J et strictement croissante (Resp. décroissante), alors sa fonction réciproque est une fonction strictement croissante sur J(Resp. décroissante).

Propriété 6. *Dérivée d'une fonction réciproque*
Soit f est une fonction bijective et dérivable d'un ensemble I vers un ensemble J.

$$\forall y \in J \ / \ f'(f^{-1}(y)) \neq 0, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple 11.
Retrouver la dérivée de la fonction exponentielle comme réciproque de la fonction logarithme népérien.

Exercices

Exercice 1.

1. Que vaut $f(A)$ dans le cas suivant : $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ et $A = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.
2. Soit $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Donner son ensemble de définition D. Déterminer $f(D)$.

Exercice 2.
Calculer si c'est possible $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(\{0\})$ pour les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x - 1$
2. $f(x) = x^2 - 1$

Exercice 3.
Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$. On considère l'application f de E dans F définie par :
$f(t) = \frac{1}{2} t^2 + 3t + 2$.

1. On considère $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$. Tracer la représentation graphique (C) de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2. En utilisant la courbe, déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R}^+)$, $f(]-4;1])$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et $f^{-1}([-3;2])$.
3. Dans les trois cas suivants, l'application f ainsi définie est-elle injective, surjective, bijective ?
   (a) $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
   (b) $E = [-3, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$;
   (c) $E = [-3, +\infty[$ et $F = \left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$

   .

Exercice 4.

Soit $f \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$ et $g \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ y \mapsto 0 \text{ si } y = 0 \text{ , } y-1 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelles de f et de g, et déterminer f^{-1} et g^{-1} le cas échéant.
2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 5.

Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Lorsque ce sont des bijections, préciser la bijection réciproque :

1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x-y, x+y) \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2x+y-1 \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x+1, 2x+1) \end{cases}$

Exercice 6.

Montrer que la relation $y = x + \sqrt{x^2+1}$ définit une application f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
Montrer que f est bijective et trouver sa réciproque.

Exercice 7.

L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + \dfrac{1}{z}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 8.
Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$ deux applications. Montrer que :

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective
3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

Exercice 9. (Facultatif)
Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que $f \circ f = \mathrm{id}$.
2. En déduire que f est bijective et déterminer la fonction réciproque de f.

Exercice 10. (Facultatif)
On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\Big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\Big) \Leftrightarrow \Big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\Big).$$