COMPARAISON LOCALE DES FONCTIONS

Objectifs

- **Connaître les développements limités usuels.**
- **Savoir calculer les développements limités par différentes techniques.**
- **Savoir quand appliquer la notion de développements limités.**

Dans tout ce chapitre, I représente un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ représente l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

1 Fonctions négligeables

Définition 1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un réel. $a \in \mathbb{R}$ ou bien a est une borne de I. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a où $a \in [-\infty, +\infty]$, si et seulement si :

1. Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$
2. Cas $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$
3. Cas $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant A \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$

On note $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou, s'il n'y a pas de confusion possible, $f = o(g)$. On dit aussi que $f(x)$ est infiniment petit par rapport à $g(x)$ au voisinage de a.

Proposition 1 (Caractérisation)**.**
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$
2. Si $g \neq 0$ au voisinage de a, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$
3. Il existe une fonction ε telle que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ au voisinage de a.

Exemple 1.

1. Déterminer tous les entiers n tels que $\dfrac{x^3}{1 + x^2} = o(x^n)$ au voisinage de 0.
2. Soit f une fonction telle que $f(x) = o(x^3)$ au voisinage de 0. Déterminer les entiers n tels que $\dfrac{f(x)}{x} = o(x^n)$.

Les propriétés sur la notion de négligeabilité sont les mêmes que celles vues dans le chapitre sur les suites. En particulier, on retrouve le théorème des croissances comparées :
en $+\infty$: $x^\alpha = o(x^\beta)$ ssi $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o(e^x)$, $\ln x = o(x^\beta)$
en 0^+ : $x^\beta = o(x^\alpha)$ ssi $\alpha < \beta$, $\ln x = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

2 Développements limités

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel, et $a \in \mathbb{R}$

2.1 Développements limités usuels en 0

Définition 2.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0, ce que l'on note en abrégé $DL_n(0)$ si et seulement si il existe un polynôme P_n de degré au plus égal à n, tel que : $f(x) - P_n(x) = o((x)^n)$ au voisinage de 0.
Un $DL_n(0)$ de f s'écrit :
$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.

Remarque 1.
Quelle que soit la situation 1. ou 2., la quantité o( ) est une quantité "abstraite" qui tend vers 0 quand x tend vers 0, c'est à dire que les termes qui suivent sont négligeables au voisinage de a par rapport aux termes qui les précédent. On ne calculera pas o( ). o( ) est l'erreur commise en remplaçant f(x) par $P_n(x)$.

Proposition 2.
Le polynôme P_n du $DL_n(0)$ de f est unique. Ce polynôme est appelé partie régulière du $DL_n(0)$ de f et notée $[f]_n$.

Exemple 2.
Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + 12x^3 + 5x^4$

Exemple 3.
On veut trouver le DL de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1. Donner la formule de $1 + x + ... + x^n$ pour $x \neq 1$.
2. En déduire une expression de $f(x)$ puis son $DL_n(0)$.

Proposition 3.
La partie régulière d'une fonction paire est paire et la partie régulière d'une fonction impaire est impaire.

2.2 Développements limités et fonctions dérivables

Théorème 1 (Formule de Taylor Young)**.**
On suppose ici que $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$, telle que $f^{(n)}(0)$ existe. Alors f admet un $DL_n(0)$ donné par la formule de Mac-Laurin :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] + o\left(x^n\right) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

Remarque 2.
- pour que f admette un $DL_0(0)$ il faut et il suffit que f soit continue en 0
- pour que f admette un $DL_1(0)$ il faut et il suffit que f soit dérivable en 0
- il existe des fonctions qui ne vérifient pas les hypothèses du théorème de Taylor-Young et qui ont néanmoins un DL pour $n \geqslant 2$:

Exemple 4.
Donner le $DL_n(0)$ de $f(x) = \exp(x)$.

2.3 Quelques $DL_n(0)$ usuels

$e^x =$

$\cos x =$

$\sin x =$

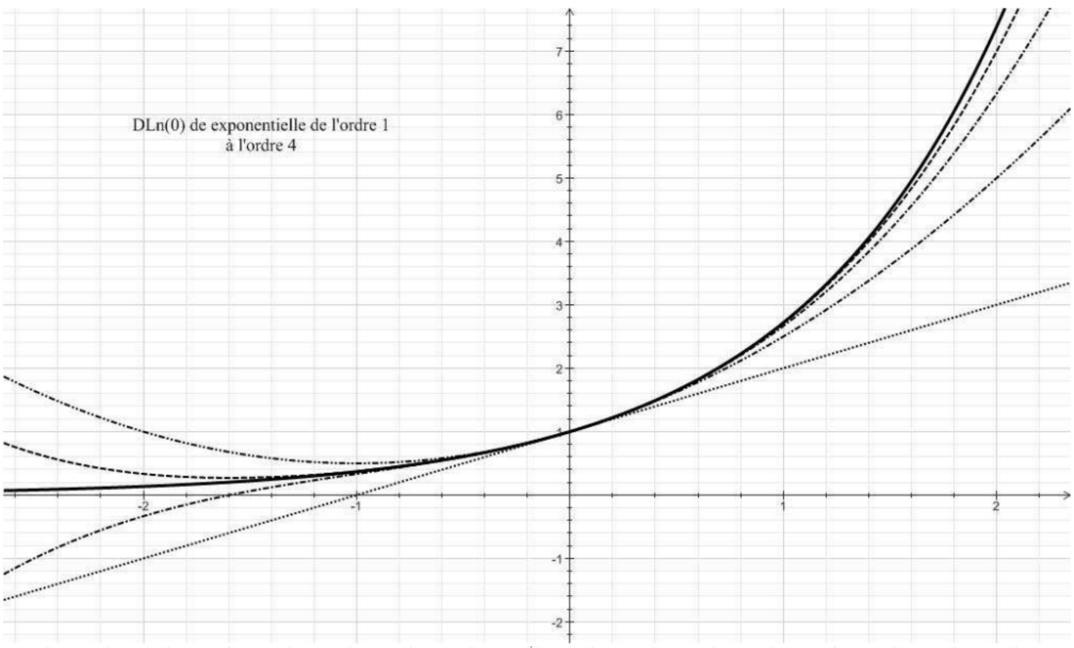
$\operatorname{ch} x =$

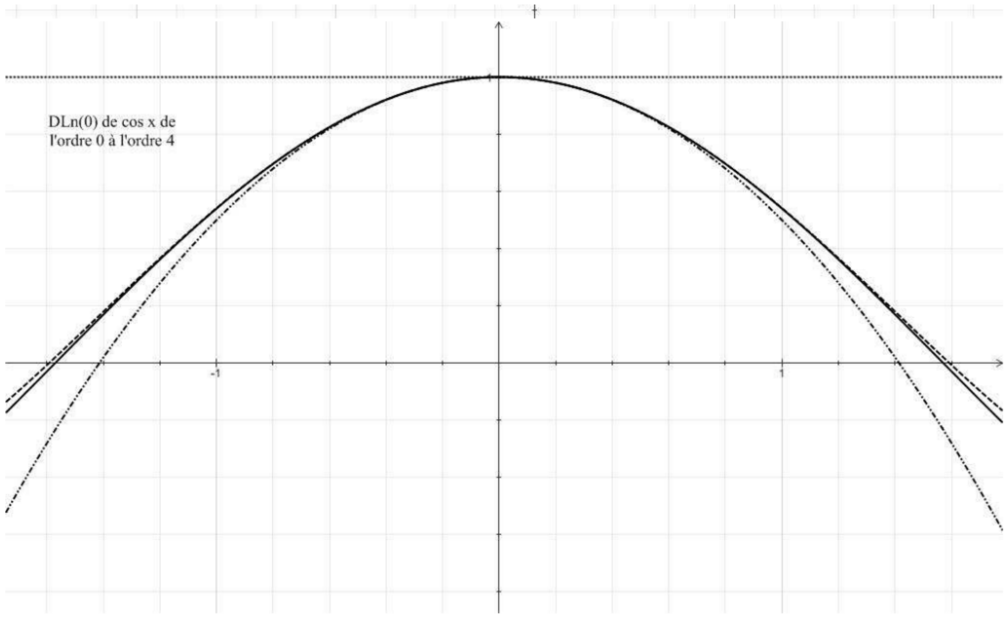
$\operatorname{sh} x =$

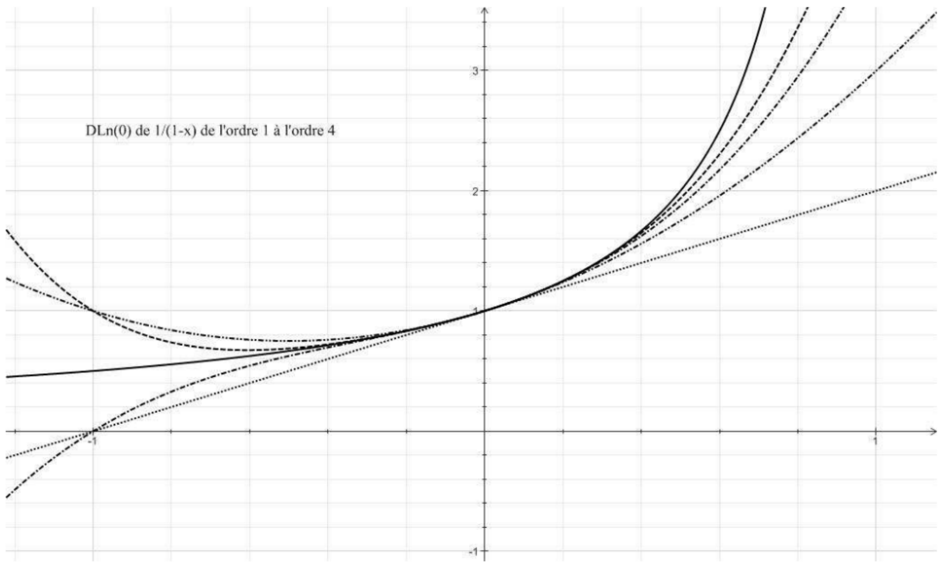
$(1+x)^\alpha =$

$\dfrac{1}{1+x} =$

$\dfrac{1}{1-x} =$







2.4 Opérations sur les DL

1. **La combinaison linéaire**
   Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ alors $f + \lambda g$ admet un $DL_n(0)$ et on a : $[f + \lambda g]_n = [f]_n + \lambda[g]_n$.
2. **La multiplication**
   Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ alors $f.g$ admet un $DL_n(0)$ et on a : $[f.g]_n = [[f]_n.[g]_n]_n$.
   Cela signifie que l'on ne conserve dans la partie régulière du $DL_n(0)$ de $f.g$ que les termes du développement de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 5.

(a) Donner le $DL_3(0)$ de $\dfrac{e^x}{1+x}$

(b) Donner le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

3. **La composition**
Soit f une fonction de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et g une fonction de $\mathcal{F}(J,\mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que $\boxed{f(0)=0}$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ et on a : $[g \circ f]_n = [g]_n \circ [f]_n$.
Cela signifie que l'on ne conserve dans la partie régulière du $DL_n(0)$ de $g \circ f$ que les termes de la composition de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 6.
Donner le $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$

4. **L'inverse**
Soit g une fonction de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ admettant un $DL_n(0)$ telle que $\boxed{g(0) \neq 0}$ alors $\dfrac{1}{g}$ admet un $DL_n(0)$ obtenu grâce à la division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Exemple 7.
Donner le $DL_5(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

5. **La division**
Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ et telle que $\boxed{g(0) \neq 0}$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ obtenu grâce à la division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Exemple 8.
Donner le $DL_5(0)$ de $f(x) = \tan x$

2.5 L'intégration

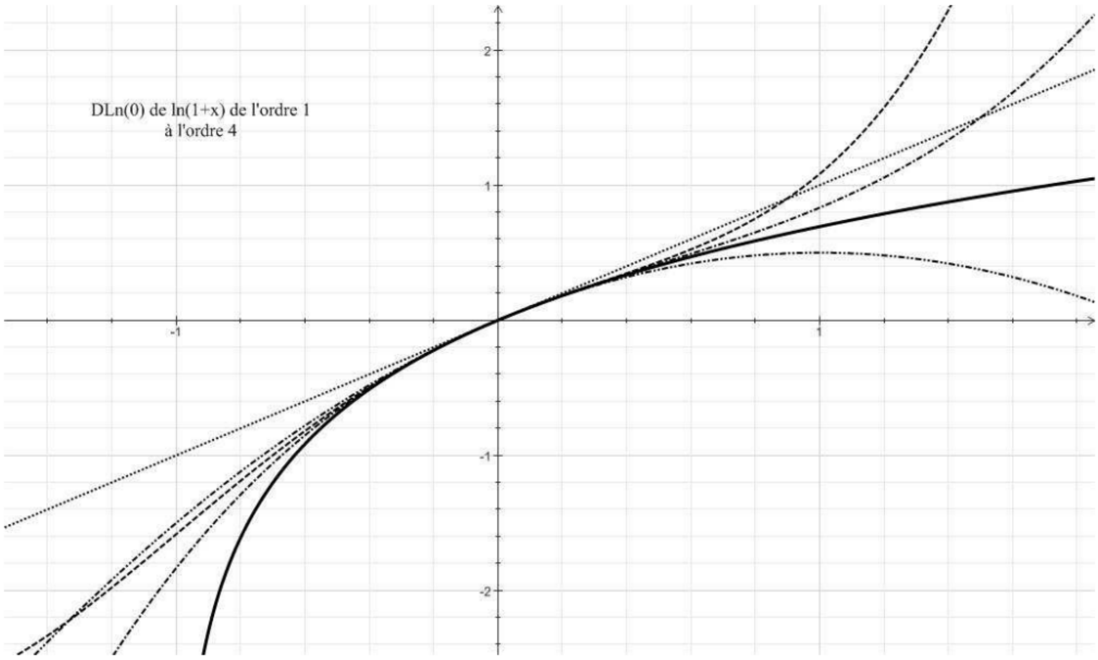
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ admettant un $DL_n(0)$ donné par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right] + o(x^n)$. Alors toute primitive F de f possède sur I un $DL_{n+1}(0)$ donné par :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

La méthode est simplement d'intégrer "terme à terme" le $DL_n(0)$ de f et on rajoute le terme constant $F(0)$.
Ainsi, on trouve grâce à cette proposition :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$



Exemple 9.
Donner un $DL_3(0)$ de $\operatorname{Arcsin} x$

2.6 La dérivation

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ admettant un $DL_n(0)$ donné par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right] + o\left(x^n\right)$. Alors le $DL_{n-1}(0)$ de f', **s'il existe** est donné par :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(0) x^{k-1} + o(x^{n-1})$$

Exemple 10.
Montrer que la dérivée f' de la fonction : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ n'admet pas de $DL_0(0)$ alors que f admet un $DL_1(0)$

2.7 Développements limités en a

Définition 3.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a, ce que l'on note en abrégé $DL_n(a)$ si et seulement si il existe un polynôme P_n de degré au plus égal à n, tel que : $f(x) - P_n(x-a) = o((x-a)^n)$ au voisinage de a.
Un $DL_n(a)$ de f s'écrit :
$f(x) = P_n(x-a) + o((x-a)^n) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

Remarque 3.
Dans la pratique, on se ramènera toujours à un $DL_n(0)$ par changement de variable si c'est

nécessaire. Pour déterminer le $DL_n(a)$ de $f(x)$ on posera $x = a+h$ et on fera un développement limité en h en O.

Exemple 11.
Déterminer à l'ordre 3 le développement limité de $f(x) = sin(x)$ en $\frac{\pi}{2}$.

ATTENTION : un $DL_n(a)$ c'est un polynôme en $x-a$. On ne développe pas la partie régulière du $DL_n(a)$ pour réexprimer une partie régulière polynôme en x.

La formule de Taylor Mac-Laurin est un cas particulier de la formule suivante valable en un réel a quelconque :

Théorème 2 (Formule de Taylor-Young)**.**
On suppose ici que $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$, telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors f admet un $DL_n(a)$ donné par la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right] + o\left((x-a)^n\right) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

3 Développement asymptotique

Définition 4.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), appelé développement asymptotique de f et que l'on note en abrégé $DL_n(+\infty)$ (respectivement $DL_n(-\infty)$) si et seulement si il existe un polynôme E et un polynôme P_n de degré au plus égal à n, tel que : $f(x) - \left(E(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Un développement asymptotique c'est à dire un $DL_n(\pm\infty)$ de f s'écrit :
$f(x) = E(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) = E(x) + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

On fait un changement de variables en posant $x = \frac{1}{t}$ c'est à dire $t = \frac{1}{x}$. On cherche alors un $DL_n(0)$, puis on repasse à $f(x)$.

Exemple 12.
Déterminer le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 2 de $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$

4 Equivalence

Définition 5.
Soient f et f deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a où $a \in [-\infty, +\infty]$, si et seulement si : $f - g = o(g)$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Proposition 4 (Caractérisation)**.**
Si $g \neq 0$ au voisinage de a alors on a :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\to} 1$$

Exemple 13.
Á t'on les équivalences suivantes en 0 :

1. $e^x \sim 1 + x$
2. $e^x \sim 1 + 2x$
3. $e^x - 1 \sim 2x$

Remarque 4.
D'après l'exemple précédent, on remarque que l'équivalent d'une fonction n'est pas unique. D'autre part, on ne peut pas manipuler facilement les équivalents.

Proposition 5. Si $f \sim g$ et $l \sim k$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{l} = \lim\limits_{x \to a} \frac{g}{k}$

4.1 Quelques équivalents usuels en 0

Pour donner un équivalent, on peut utiliser le développement limité de la fonction, on obtient ainsi :

$e^x - 1 \underset{0}{\sim}$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$	$(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim}$
$\cos x \underset{0}{\sim}$	$\sin x \underset{0}{\sim}$	$\tan x \underset{0}{\sim}$
$\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim}$	$\operatorname{th} x \underset{0}{\sim}$	$\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x$
$\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim}$	$\operatorname{Argsh} x \underset{0}{\sim}$	$\operatorname{Argth} x \underset{0}{\sim}$

5 Applications

5.1 Applications des développements limités

Il existe de nombreuses applications des développements limités dont voici les principales :

1. *Pour calculer une limite.*

   On pourra utiliser la proposition 5 ou utiliser un DL.

   Exemple 14.
   calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$

2. *Pour donner une équation d'une tangente en un point.*

   Si f admet un $DL_n(a)$ du type : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ alors $y = a_0 + a_1(x-a)$ est l'équation de la tangente en $(a, f(a))$ et sa position est donné par le signe du 1er membre non nul qui suit $a_1(x-a)$.

   Exemple 15.
   Donner une équation de la tangente en 1 de la fonction $\operatorname{Arctan} x$ et sa position de la courbe par rapport à cette tangente.

5.2 Application des développements asymptotiques

Equation des asymptotes.

Si f admet $DL_n(\pm\infty)$ du type : $f(x) = a_0 x + a_1 + \dfrac{a_p}{x^p} + o\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ alors $y = a_0 x + a_1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $\pm\infty$. Le signe du terme $\dfrac{a_p}{x^p}$ donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exemple 16.

Donner une équation de l'asymptote oblique à la courbe d'équation $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ et sa position par rapport à son asymptote oblique.

Exercices TD 1 - 3

Exercice 1. Rappeler les $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-u}$ et $\exp(u)$ puis déterminer les $DL_3(0)$ des expressions suivantes :

1. $1 - \dfrac{1}{1-x}$
2. $\dfrac{1}{1+x^2}$
3. $\dfrac{1}{1-3x}$
4. $\dfrac{1}{2+x}$
5. $\exp(2x)$
6. $\exp(x^2)$
7. $x\exp(-x)$
8. $\exp(x+1)$

Exercice 2.
Donner les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

1. $a(x) = \sin x + \cos x$
2. $b(x) = \sin x \ln(1+x)$
3. $c(x) = \cos x \ln(1+2x)$
4. $d(x) = x\ln(x+1) - x$
5. $e(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
7. $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2}$
8. $h(x) = \ln(1+\sin x)$
9. $i(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$
10. $j(x) = \dfrac{\arctan x}{1-x^2}$
11. $k(x) = \sqrt[3]{1+x}$ puis de $o(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$
12. (Optionnel - difficile*) $l(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$

Exercice 3.
En passant par le calcul de leur dérivée, déterminer les développements limités à l'ordre 3 de $f(x) = \ln(3+x)$ et $g(x) = \arcsin(x)$.

Exercice 4.
Donner un $DL_3(1)$ de $f(x) = \sqrt{x}$

Exercice 5.
Donner un $DL_3(+\infty)$ de

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - (x+1)$
2. $g(x) = \dfrac{x^3+2}{x-1}$

Exercice 6.

1. Donner un $DL_2(+\infty)$ de $\dfrac{x+1}{x+2}$
2. Donner un $DL_2(+\infty)$ de $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$
3. Donner un $DL_2(0)$ de $\operatorname{Arctan} x$
4. Donner un $DL_2(+\infty)$ de $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} - 1\right)$

Exercice 7.

1. Écrire le développement limité à l'ordre 3, lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $\ln x - \ln(x-1)$.
2. En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x^2}$

Exercice 8.
Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Exercice 9.
Déterminer les tangentes des représentations graphiques des fonctions suivantes en 0, ainsi que la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de 0, et représenter l'allure de la courbe au voisinage de 0.

1. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x\sin(x)}$

Exercice 10.
En utilisant des développements limités au voisinage de l'infini aux courbes d'équations suivantes :

- déterminer une équation des asymptotes
- Déterminer leur position relative.
- Déterminer l'allure de la courbe au voisinage de l'infini.

1. $y = \sqrt{x^2+4x-5}$
2. $y = x^2 \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$
3. $y = e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}$

Exercice 11.
Donner un équivalent de :

1. $\ln x$ en 1.
2. $\ln^4(1+x)$ en 0.
3. $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0.
4. $\dfrac{\sin(2x)}{(\ln(1+3x))^2}$ en 0.
5. $\ln(1+2x) - \sin(2x)$ en 0.
6. $\dfrac{x^2+3}{x^4+2}$ en $+\infty$.
7. $\dfrac{e^{-x}+2}{x^2+x^4}$ en $+\infty$ puis en $-\infty$.

Exercice 12.
Trouver les limites en zéro à partir de développements limités ou d'équivalents de :

1. $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$
7. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\ln(1+x)}$

Exercice 13.
Trouver les limites en 1 à partir d'un $DL_n(1)$ ou équivalent en 1 de :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$
3. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{1/x}}{x^2 - 1}$

Exercice 14.
On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} (1+x^2) + x^2\varepsilon(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$,
où $\varepsilon(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.
Montrer que f admet un $DL_2(0)$ qui ne provient pas de la formule de Mac-Laurin.