1 Comment montrer que E est un Espace Vectoriel

1) $\begin{cases} (E, \oplus) \text{ grp commutatif} \\ \text{tous les critère pour la loi externe} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \text{E est un SEV d'un EV connu} \end{cases}$

Espaces Connus :

↳ $(\mathbb{R}^n ; + ; \cdot)$ $x = (x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$
et $0_E = (0 ; 0 ; \dots ; 0)$

↳ $E = \mathcal{M}_n(\ )$ $X = \underbrace{\begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a \end{pmatrix}}_{\text{vecteur = matrice}}$

$0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

↳ $E = \{\text{fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$

vecteur = fonction

$0_E(x) = 0$

② Comment montrer que F est un SEV de E ?

1) $0_E \in F$
On montre que F est stable par combinaison linéaire

2) Dans $\mathbb{R}^2$ on reconnaitre directement 1 droite vectorielle

3) Dans $\mathbb{R}^3$ on peut reconnaitre directement un plan vectoriel

Exemple 1 : F est-il un SEV ?

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, ad - bc = 0 \right\}$

· $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ car $0 \times 0 - 0 \times 0 = 0$

· $A \in F$

$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad - bc = 0$

$B \in F$

$B \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} / a'd' - b'c' = 0$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha A + B = \begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}$

$(\alpha a + a')(\alpha d + d') - (\alpha c + c')(\alpha b + b')$

$= \alpha^2 ad + \alpha a d' + \alpha a' d + a'd' - \alpha^2 bc - \alpha b'c - \alpha b c' - b'c'$

$= \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{pas tj nul}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$ $A \in F$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$ $B \in F$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ or $3 \times 7 - 4 \times 5 \neq 0$ $A + B \notin F$

③ Que dire de $F \cap G$ si F et G SEV ?

↳ $F \cap G$ est 1 SEV

④ Que dire de $F \cup G$ si F et G SEV ?

↳ En général ce n'est pas un SEV, sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$

⑤ Comment travailler avec $F+G$ si F et G sont des SEV

↳ Si $x \in F+G$
$\exists f \in F, \exists g \in G /$
$x = f + g$

6) Comment montrer que F et G sont en somme directe ?

↳ $F \cap G = \{0_E\}$

montrer que $F \cap G \subset \{0_E\}$ et $\{0_E\} \subset F \cap G$

-> inclusion tj vraie car $F \cap G$ est 1 SEV

↳ Si $(f_1; \dots; f_p)$ est base de F

Si $(g_1; \dots; g_p)$ est base de G

F et G sont en somme direct <=> $(f_1; \dots; f_p; g_1; \dots; g_p)$ sont libres dans E

Exemple :

⑦ Comment montrer qu'une famille de vecteurs est libre dans E

↳ Si il n'y a qu'un seul vecteur il suffit de montrer que ce vecteur n'est pas nul

↳ S'il n'y a que deux vecteurs, il suffit de montrer qu'ils ne sont pas colinéaires

↳ Sinon on passe par le système

↳ En dimension n une famille avec un nombre de vecteurs $> n$ sera liée !

Exemple :

Les familles ci dessous sont-elles libre dans E ?

1) $u\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $v\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $w\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ dans $E = \mathbb{R}^3$

On passe par le système

Soient a, b, c scalaires /

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

ici $(u; v; w)$ libre

2) $(f_1; f_2)$ dans $E = \{\text{fonctions de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$

$f_1(x) = \cos x$ $\quad f_2(x) = \sin x$

$$\exists \alpha \,/\, \alpha \in \mathbb{R}^* \quad f_2 = \alpha f_1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \overbrace{\sin x = \alpha \cos x}^{\text{impossible avec 1 seul } \alpha}$$

8 A propos des familles generatrices

1) Comment montrer que $(u_1; \dots; u_p)$ génère F :

↳ On montre que tout vecteur de F s'écrit comme 1 combinaison linéaire de $(u_1; \dots; u_p)$:

$\forall x \in F \ \exists (\alpha_1; \dots; \alpha_p) / x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$

2) Si $F = \text{vect}(u_1; \dots; u_p)$ donc $(u_1; \dots; u_p)$ génère F

3) En dimension n une famille qui a $< n$ vecteurs ne sera jamais génératrice de E.

4) théorème 7

9) Comment montrer qu'une famille est une base ?

1) En dimension n si on a n vecteurs formant une famille libre c'est une base.

2) On montre que la famille est libre et génératrice

3) En dim n si on a n vecteurs formant une famille génératrice alors c'est une base.

Exemple :

$F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$
$G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \text{vect}(w)$

$$F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = -x-y\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix},\ x, y \text{ réels}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\\-y\end{pmatrix} \text{——}\right\}$$
$$= \left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \text{——}\right\}$$

$F = \text{vect}(u;v)$ avec $u = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$
$(u;v)$ base de de F et w base de G

$F \cap G = \{0_E\} \iff (u;v;w)$ libre

Soient a, b, c réels /
$$a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$ donc $(u;v;w)$ libre

10 Comment montrer que $F = G$ si F et G sont 2 SEV ?

1) Par double inclusion $F \subset G$ et $G \subset F$

2) $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ (en dim finie)

(11) Comment montrer que 2 SEV F et G sont supplémentaires dans E ?

$F \oplus G = E$

1) $F \cap G = \{0_E\}$

$F + G = E$

2) Si $(f_1 ; \dots ; f_p)$ base de F

$(g_1 ; \dots ; g_p)$ base de G

$F \oplus G = E \iff$

$(f_1 ; \dots ; f_p ; g_1 ; \dots ; g_p)$ base de E

3) Si $\dim F + \dim G = \dim E$

et $F \cap G = \{0_E\}$

alors $F \oplus G = E$

4) Si $\dim F + \dim G = \dim E$

et $F + G = E$

alors $F \oplus G = E$

12 Comment trouver la dimension ?

1) Trouver une base et compter le nombre de vecteurs

2) $\dim(\{0_E\}) = 0$

3) Formule de Grassmann