Fiche Méthode

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ est une famille libre dans E

- si cette famille ne contient qu'un vecteur il suffit de montrer que ce vecteur n'est pas le vecteur nul.
- si cette famille ne contient que deux vecteurs il suffit de montrer que ces deux vecetucrs ne sont pas colinéaires
- si nous avons plus de deux vecteurs nous considérons $a_1, a_2, ..., a_p$ des scalaires tels que $a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_pe_p = 0_E$ alors il faut prouver que $a_1 = a_2 = ...a_p = 0$.
- si nous savons qu'une famille de vecteurs est une base alors c'est une famille libre.
- toute sous-famille d'une famille libre est libre
- Si l'e.v E est un e.v de dimension n alors toute famille libre admet un nb de vecteurs $\leq n$. (En particulier toute famille ayant strictement plus de n vecteurs ne pourra pas être libre).

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est une famille génératrice d'un sev F

- par la définition à savoir $\forall u \in F$ nous devons prouver qu'il existe $a_1, a_2, ..., a_p$ tels que $u = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_pu_p$
- si nous savons que $F = Vect(u_1, u_2, ..., u_p)$ alors par définition nous savons que $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est une famille génératrice de F
- si nous savons qu'une famille de vecteurs est une base alors c'est une famille génératrice.
- si nous enlevons à une famille génératrice un vecteur qui se décompose sur cette famille alors cette famille reste génératrice.
- Si l'e.v E est un e.v de dimension n alors toute famille génératrice admet un nb de vecteurs $\geq n$. (En particulier toute famille ayant strictement moins de n vecteurs ne pourra pas être génératrice).

Pour prouver qu'une famille de vecteurs est une BASE

- on prouve que c'est une famille à la fois libre et génératrice.
- si $dim(E) = n$ alors toute famille libre de n vecteurs est une base.
- si $dim(E) = n$ alors toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Pour trouver la DIMENSION d'un sev F

- soit nous connaissons une base de F donc la dimension de F c'est le nombre de vecteurs dans cette famille.
- nous pouvons être amenés à utiliser la formule de Grassman $dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$
- $dim(\mathbb{R}^n) = n$

Pour prouver que deux sev en dimension finie F et G sont egaux

- nous prouvons les deux inclusions $F \subseteq G$ et $G \subseteq F$
- sinon on prouve une inclusion une inclusion $F \subseteq G$ et l'égalité des dimensions $dim(F) = dim(G)$.

$\boxed{\text{Pour prouver que E est un espace vectoriel}}$

— soit prouver tous les items du cours
— soit prouver que E est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

$\boxed{\text{Pour prouver que F est un sous espace vectoriel de E}}$

— prouver que $0_E \in F$ et que $\forall u \in F \quad \forall v \in F$, $\forall \alpha \in K \quad \forall \beta \in K$alors $\alpha u + \beta v \in F$.
— se rappeler que l'intersection de deux sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel

$\boxed{\text{Pour trouver le rang d'une famille de vecteurs } f_1, f_2, ..., f_k}$

— par définition $rang(\{f_1, f_2, ..., f_k\} = dim(Vect(f_1, f_2, ..., f_k))$

$\boxed{\text{Pour prouver que deux sev F et G sont supplémentaires ds un ev E de dimension finie}}$

— par définition on doit prouver $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$
— on prouve que $F \cap G = \{0_E\}$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$
— on prouve que $F + G = E$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$
— si $F = Vect(f_1, f_2, ..f_p) \quad G = Vect(g_1, g_2, .., g_q)$ il faut prouver que la famille de vecteurs $(f_1, f_2, ..f_p, g_1, g_2, .., g_q)$ est une base de E.