LES APPLICATIONS

1 Fonctions circulaires réciproques

1.1 Arc sinus

1.1.1 Définition

Définition 1.
La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans [-1 ;1] est continue et strictement croissante, donc elle admet une bijection réciproque définie sur $[-1;1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ appelée Arc sinus et notée Arcsin.
On a donc :

$$\text{Arcsin} : [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

Remarque 1 (ATTENTION). La fonction Arcsin n'est pas la bijection réciproque de la fonction sinus mais celle de sa restriction à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. On a donc par exemple :

$$\sin\left(\text{Arcsin}\,\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$
$$\text{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$$

mais
$\text{Arcsin}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ car c'est l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ayant le même sinus que $\frac{3\pi}{4}$.

Vidéo : *La remarque 1 en détail*

Exemple 1. Calculer $\text{Arcsin}(\sin\frac{\pi}{3})$ et $\text{Arcsin}(\sin\frac{4\pi}{3})$.

Proposition 1.
Arcsin est strictement croissante (cf chapitre précédent), et continue sur $[-1;1]$.

1.1.2 Dérivée

Proposition 2.

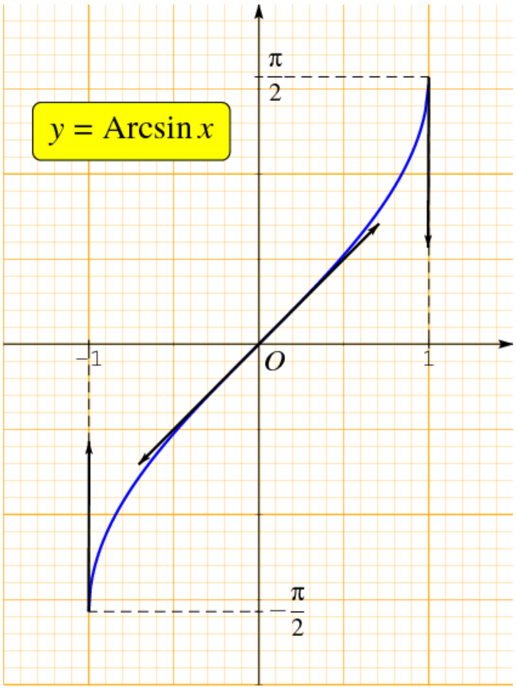
$$\forall x \in]-1;1[, \text{Arcsin}'\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

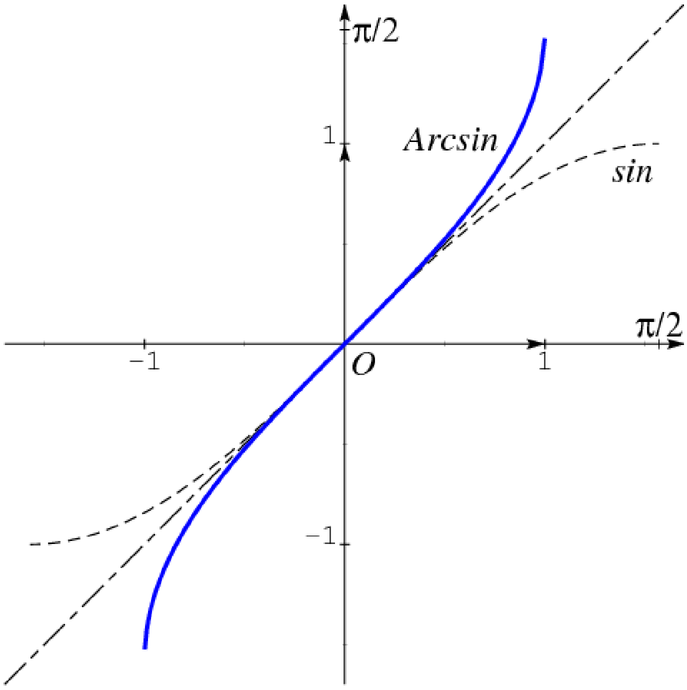
Vidéo : *Démonstration de la formule de dérivée*

1.1.3 Parité

Arcsin est impaire car c'est la bijection réciproque d'une fonction impaire. On peut donc réduire l'étude à $[0;1]$.

1.1.4 Représentation graphique





1.2 Arc cosinus

1.2.1 Définition

Définition 2. La restriction de la fonction cosinus à $[0;\pi]$ à valeurs dans [-1 ;1] est continue et strictement décroissante, donc elle admet une bijection réciproque définie sur $[-1;1]$ à valeurs dans $[0;\pi]$ appelée Arc cosinus et notée Arccos.
On a donc :

$$\text{Arccos} : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$$

Remarque 2 (ATTENTION). La fonction Arccos n'est pas la bijection réciproque de la fonction cosinus mais celle de sa restriction à $[0;\pi]$. On a donc par exemple :

$$\cos\left(\text{Arccos}\,\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Arccos}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$$

mais
$\text{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ car c'est l'unique élément de $[0;\pi]$ ayant le même cosinus que $\frac{4\pi}{3}$.

Exemple 2. Calculer $\text{Arccos}(\cos -\frac{\pi}{2})$ et $\text{Arccos}(\cos\frac{\pi}{2})$

Proposition 3.
Arccos est strictement décroissante et continue sur $[-1;1]$.

1.2.2 Dérivée

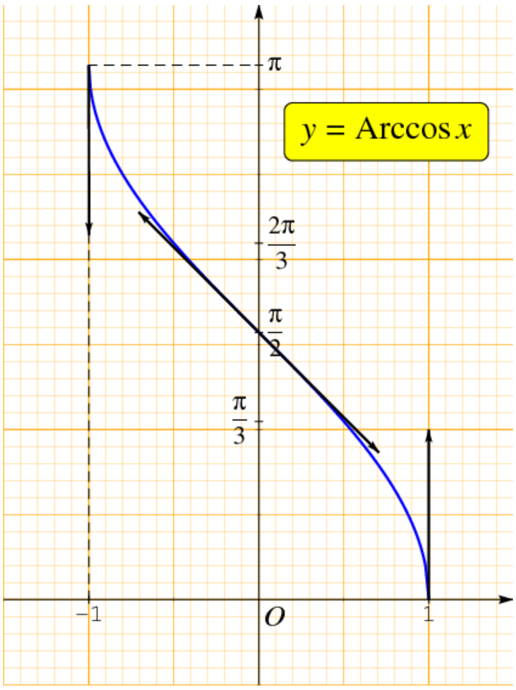
Proposition 4.

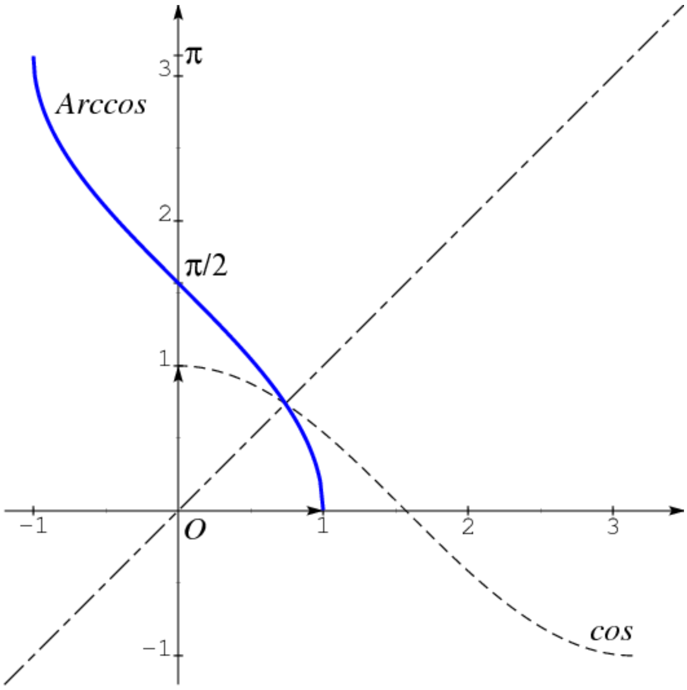
$$\forall x \in]-1;1[, \text{Arccos}'\, x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exemple 3.
Démontrer la proposition précédente.

Attention
Arccos n'est ni paire ni impaire.

1.2.3 Représentation graphique





Exemple 4.
Montrons de deux manières différentes que : $\forall x \in [-1;1], \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$

1. 1ère méthode
   (a) Calculer la dérivée de $\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x$
   (b) En déduire que $\forall x \in [-1;1], \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$
2. 2ème méthode
   (a) Montrer que $\cos(\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x) = 0$
   (b) Montrer que $\sin(\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x) = 1$
   (c) Montrer que $\forall x \in [-1;1], \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x \in [-\frac{pi}{2};3\frac{\pi}{2}]$
   (d) En déduire que $\forall x \in [-1;1], \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$

1.3 Arc tangente

1.3.1 Définition

Définition 3.
La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $]-\infty;+\infty[$ est continue et strictement croissante, donc elle admet une bijection réciproque définie sur $]-\infty;+\infty[$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ appelée Arc tangente et notée Arctan.
On a donc :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

Remarque 3 (ATTENTION). La fonction Arctan n'est pas la bijection réciproque de la fonction tangente mais celle de sa restriction à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On a donc par exemple :

$$\tan(\text{Arctan}\, 5) = 5$$
$$\text{Arctan}\left(\tan\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$$

mais
$\text{Arctan}\left(\tan\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$ car c'est l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ayant la même tangente que $\frac{8\pi}{7}$.

Exemple 5. Calculer $\text{Arctan}(\tan -\frac{\pi}{3})$ et $\text{Arctan}(\tan\frac{2\pi}{3})$

Proposition 5.
Arctan est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Dérivée

Proposition 6.

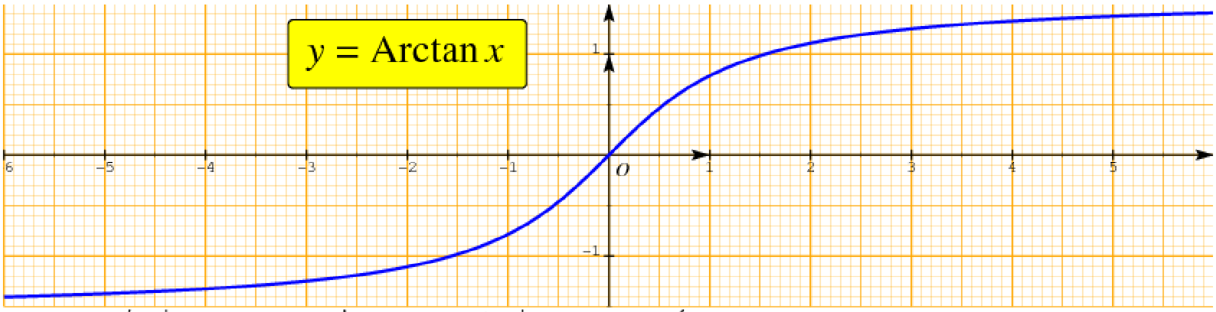
$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

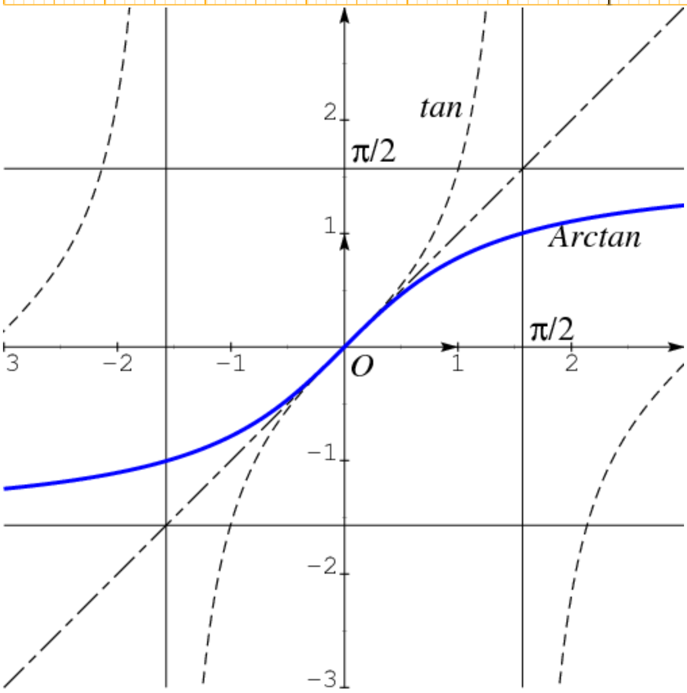
Exemple 6.
Démontrer la proposition précédente.

1.3.3 Parité

Arctan est impaire car c'est la bijection réciproque d'une fonction impaire.

1.3.4 Représentation graphique





Exemple 7.
Montrer, en dérivant les expressions, que :

1. $\forall x > 0, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$
2. $\forall x < 0, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

2 Exercices

Exercice 1.

1. Calculer si possible : $\sin(\arcsin(2))$, $\arccos(\cos(2\pi))$, $\arcsin(\sin(\dfrac{10\pi}{3}))$.
2. Simplifier, en précisant le domaine de définition : $\cos(\arcsin(x))$, $\cos(\arctan(x))$ et $\tan(\arcsin x))$.

Exercice 2.
Résoudre l'équation suivante :
$\arcsin(\sqrt{3}x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$

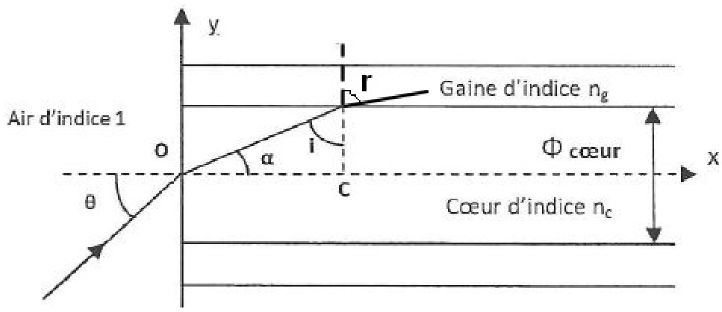
Exercice 3.
Étudier les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(\arcsin x) \,\text{et}\, g(x) = \arcsin(\sin x)$$

Exercice 4. On considère la fonction : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan x$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer f'. En déduire une expression plus simple de f sur chacun des intervalles où le raisonnement est valable.
3. Donner la représentation graphique de f.

Exercice 5. (facultatif)
Le schéma ci-dessous représente une fibre optique,avec $n_c > n_g$.



D'après les lois de Descartes pour la réfraction : $1 \sin\theta = n_c \sin\alpha$ et $n_c \sin I = n_g \sin r$.
Lorsque $\dfrac{n_c}{n_g} \sin I > 1$, le rayon se réfléchit sur la gaine, et $r = \dfrac{\pi}{2}$, est alors le cas limite de réfraction.
Montrer que $\sin\theta = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ lorsque $r = \dfrac{\pi}{2}$.
$\sin\theta$ s'appelle l'ouverture numérique.