Développements asymptotiques

Développement asymptotique

f admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), appelé développement asymptotique de f et que l'on note en abrégé $DL_n(+\infty)$ (respectivement $DL_n(-\infty)$) si et seulement si il existe un polynôme E et un polynôme P_n de degré au plus égal à n, tel que :
$f(x) - \left(E(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Un développement asymptotique c'est à dire un $DL_n(\pm\infty)$ de f s'écrit :
$f(x) = E(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) = E(x) + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Comment procéder

On fait un changement de variables en posant $x = \frac{1}{t}$ c'est à dire $t = \frac{1}{x}$. On cherche alors un $DL_n(0)$, puis on repasse à $f(x)$.

Exemple

Déterminer le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 2 de $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$

Exemple

On pose $x = \frac{1}{t}$

$$f(x) = (1 + \frac{5}{t} + \frac{1}{t^2})^{\frac{1}{2}}$$

Exemple

On pose $x = \frac{1}{t}$

$$f(x) = (1 + \frac{5}{t} + \frac{1}{t^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (\frac{t^2 + 5t + 1}{t^2})^{\frac{1}{2}}$$

Exemple

On pose $x = \frac{1}{t}$

$$f(x) = (1 + \frac{5}{t} + \frac{1}{t^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (\frac{t^2 + 5t + 1}{t^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}(1 + 5t + t^2)^{\frac{1}{2}}$$

Exemple

On pose $x = \frac{1}{t}$

$$f(x) = (1 + \frac{5}{t} + \frac{1}{t^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (\frac{t^2 + 5t + 1}{t^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}(1 + 5t + t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = 5t + t^2 \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)\frac{u^3}{3!} + o(u^3)]$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)\frac{u^3}{3!} + o(u^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}u + \frac{-1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)]$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)\frac{u^3}{3!} + o(u^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}u + \frac{-1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}(5t + t^2) + \frac{-1}{8}(5t + t^2)^2 + \frac{1}{16}(5t + t^2)^3 + o(t^3)]$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)\frac{u^3}{3!} + o(u^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}u + \frac{-1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}(5t + t^2) + \frac{-1}{8}(5t + t^2)^2 + \frac{1}{16}(5t + t^2)^3 + o(t^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{1}{2}(5t + t^2) + \frac{-1}{8}(25t^2 + 10t^3) + \frac{1}{16}(125t^3)^3 + o(t^3)]$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1+\frac{1}{2}(5t+t^2)+\frac{-1}{8}(25t^2+10t^3)+\frac{1}{16}(125t^3)^3+o(t^3)]$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1+\frac{1}{2}(5t+t^2)+\frac{-1}{8}(25t^2+10t^3)+\frac{1}{16}(125t^3)^3+o(t^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{5}{2}t + \frac{-21}{8}t^2 + \frac{105}{16}t^3 + o(t^3)]$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1+\frac{1}{2}(5t+t^2)+\frac{-1}{8}(25t^2+10t^3)+\frac{1}{16}(125t^3)^3+o(t^3)]$$

$$f(x) = \frac{1}{|t|}[1 + \frac{5}{2}t + \frac{-21}{8}t^2 + \frac{105}{16}t^3 + o(t^3)]$$

$$t > 0 \quad x + \infty f(x) = x + \frac{5}{2} + \frac{-21}{8}\frac{1}{x} + \frac{105}{16}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

$$t < 0 \quad x + -\infty f(x) = -x - \frac{5}{2} + \frac{21}{8}\frac{1}{x} + \frac{-105}{16}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

Équivalence

Équivalence : définition

Soient f et f deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a où $a \in [-\infty, +\infty]$, si et seulement si : $f - g = o(g)$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Équivalence : Caractérisation fondamentale

Si $g \neq 0$ au voisinage de a alors on a :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$$

Exemple

'A t'on les équivalents suivants en 0 :

1. $e^x \sim 1 + x$
2. $e^x \sim 1 + 2x$
3. $e^x - 1 \sim 2x$

Exemple

$$\frac{e^x}{1+x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Exemple

$$\frac{e^x}{1+x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{e^x}{1+2x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Exemple

$$\frac{e^x}{1+x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

$$\frac{e^x}{1+2x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

$$\frac{e^x-1}{2x} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}$$

Application des DL

Ainsi si f admet un $DL_n(0)$ alors $f \underset{0}{\sim} [f]_n$

Exemples usuels

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1$

$\cos x \underset{0}{\sim} 1$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\tan x \underset{0}{\sim} x$

Exemples usuels

$$shx \underset{0}{\sim} x \qquad \tanh x \underset{0}{\sim} x$$

$$Arcsinx \underset{0}{\sim} x$$

$$Arctanx \underset{0}{\sim} x \qquad Argshx \underset{0}{\sim} x \qquad Argthx \underset{0}{\sim} x$$

Exemples usuels

$$shx \underset{0}{\sim} x \qquad \tanh x \underset{0}{\sim} x$$

$$Arcsinx \underset{0}{\sim} x$$

$$Arctanx \underset{0}{\sim} x \qquad Argshx \underset{0}{\sim} x \qquad Argthx \underset{0}{\sim} x$$

$$Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad Argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Exemples usuels

- Tout polynôme non nul est équivalent en $+\infty$ ou $-\infty$, à son terme de plus haut degré
- Tout polynôme non nul est équivalent en 0 , à son terme de plus bas degré
- Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente en $+\infty$ ou $-\infty$, au quotient de ses termes de plus haut degré
- Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente en 0, au quotient de ses termes de plus bas degré

Equivalents et opérations usuelles

Il est possible de MULTIPLIER des équivalents, en Revanche il est interdit d'additionner des équivalents

$$x + x^2 \sim x \quad -x + x^3 \sim -x \quad f + g \sim x^2 \neq 0$$

au voisinage de 0

Applications des développements limités et asymptotiques

Applications des DL

Il existe de nombreuses applications des développements limités dont voici les principales :

1. *Pour calculer une limite.*
2. *Pour donner une équation d'une tangente en un point.* Si f admet un $DL_n(a)$ du type : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ alors $y = a_0 + a_1(x-a)$ est l'équation de la tangente en $(a, f(a))$ et sa position est donné par le signe du 1er membre non nul qui suit $a_1(x-a)$.

Exemple

Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$

Exemple : Dénominateur

$$2x - sin(x) - tan(x) = 2x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - (x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + o(x^3)$$

Exemple : Dénominateur

$$2x - sin(x) - tan(x) = 2x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - (x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + o(x^3)$$

$$2x - sin(x) - tan(x) = (\frac{1}{6} - \frac{1}{3})x^3 + o(x^3) = \frac{-1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Exemple : Numérateur

$$x(1+cos(x)) - 2tan(x) =$$
$$x[1+1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)] - 2(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)) + o(x^3)$$

Exemple : Numérateur

$$x(1+cos(x)) - 2tan(x) =$$
$$x[1+1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)] - 2(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)) + o(x^3)$$

$$x(1+cos(x)) - 2tan(x) = \frac{-7}{6}x^3 + o(x^3)$$

Exemple

$$\frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}=\frac{\frac{-1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{-7}{6}x^3+o(x^3)}$$

Exemple

$$\frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}=\frac{\frac{-1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{-7}{6}x^3+o(x^3)}$$

$$\frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}=\frac{x^3(\frac{-1}{6}+o(1))}{x^3(\frac{-7}{6}+o(1))}$$

Exemple

$$\frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x} = \frac{\frac{-1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{-7}{6}x^3 + o(x^3)}$$

$$\frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x} = \frac{x^3(\frac{-1}{6} + o(1))}{x^3(\frac{-7}{6} + o(1))}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x} = \frac{1}{7}$$

Exemple

Donner une équation de la tangente en 1 de la fonction $Arctanx$ et sa position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exemple

Il nous faut un $DL_2(1)$ de la fonction or

Exemple

Il nous faut un $DL_2(1)$ de la fonction or

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + o((x-1)^2)$$

Exemple

Il nous faut un $DL_2(1)$ de la fonction or

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + o((x-1)^2)$$

$$f(x) = Arctan(x) \quad f(1) = \frac{\pi}{4}$$

Exemple

Il nous faut un $DL_2(1)$ de la fonction or

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + o((x-1)^2)$$

$$f(x) = Arctan(x) \quad f(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad f'(1) = \frac{1}{2}$$

Exemple

Il nous faut un $DL_2(1)$ de la fonction or

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + o((x-1)^2)$$

$$f(x) = Arctan(x) \quad f(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad f''(1) = \frac{-1}{2}$$

Exemple

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + (x-1)\frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2}\frac{-1}{2} + o((x-1)^2)$$

Exemple

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + (x-1)\frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2}\frac{-1}{2} + o((x-1)^2)$$

La tangente en 1 a pour équation $y = 0.5x + (\pi/4 - 1/2)$ et la courbe de la fonction est située en dessous de sa tangente en 1

Développement asymptotique : application avec l'équation aux asymptotes

Par un changement de variables en posant $x = \frac{1}{t}$ c'est à dire $t = \frac{1}{x}$. On cherche alors un $DL_n(0)$, puis on repasse à $f(x)$. Si f admet $DL_n(\pm\infty)$ du type : $f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ alors $y = a_0 x + a_1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $\pm\infty$. Le signe du terme $\frac{a_p}{x^p}$ donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exemple

Donner une équation de l'asymptote oblique à la courbe d'équation $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ et sa position par rapport à son asymptote oblique.

Justification de la recherche d'une asymptote oblique

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

Justification de la recherche d'une asymptote oblique

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Exemple

Étude au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

Exemple

Étude au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{1}{\sqrt{1-h}} = \frac{1}{h}(1-h)^{\frac{-1}{2}}$$

Exemple

Étude au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{1}{\sqrt{1-h}} = \frac{1}{h}(1-h)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{h}(1+0.5h+(-0.5)(-1.5)\frac{h^2}{2}) = \frac{1}{h}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}h = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

Exemple

Étude au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{1}{\sqrt{1-h}} = \frac{1}{h}(1-h)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{h}(1+0.5h+(-0.5)(-1.5)\frac{h^2}{2}) = \frac{1}{h}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}h = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

L'asymptote oblique a pour équation $x + \frac{1}{2}$ et la courbe est au dessus de son asymptote en $+\infty$

Exemple

Étude au voisinage de $-\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

Exemple

Étude au voisinage de $-\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

$$= \frac{-1}{h} \frac{1}{\sqrt{1 - h}} = \frac{-1}{h} (1 - h)^{\frac{-1}{2}}$$

Exemple

Étude au voisinage de $-\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

$$= \frac{-1}{h} \frac{1}{\sqrt{1-h}} = \frac{-1}{h}(1-h)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{-1}{h}(1+0.5h+(-0.5)(-1.5)\frac{h^2}{2}+o(h^2)) = \frac{-1}{h} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}h = o(h)$$

Exemple

Étude au voisinage de $-\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2}}{1 - h}}$$

$$= \frac{-1}{h}\frac{1}{\sqrt{1-h}} = \frac{-1}{h}(1-h)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{-1}{h}(1+0.5h+(-0.5)(-1.5)\frac{h^2}{2}+o(h^2)) = \frac{-1}{h} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}h = o(h)$$

$$= -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$$

Exemple

L'asymptote oblique a pour équation $-x - \frac{1}{2}$ et la courbe est au dessus de son asymptote en $-\infty$