Les Applications : Exemples

INSA Centre Val de Loire

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f est une fonction bijective et dérivable d'un ensemble I vers un ensemble J.

$$\forall y \in J \quad f^{'}(f^{-1}(y)) \neq 0 \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple

Démontrer la propriété précédente.

Exemple

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Exemple

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

En dérivant cette expression, nous obtenons :

$$f^{'}(x)(f^{-1})^{'}(f(x)) = 1$$

Exemple

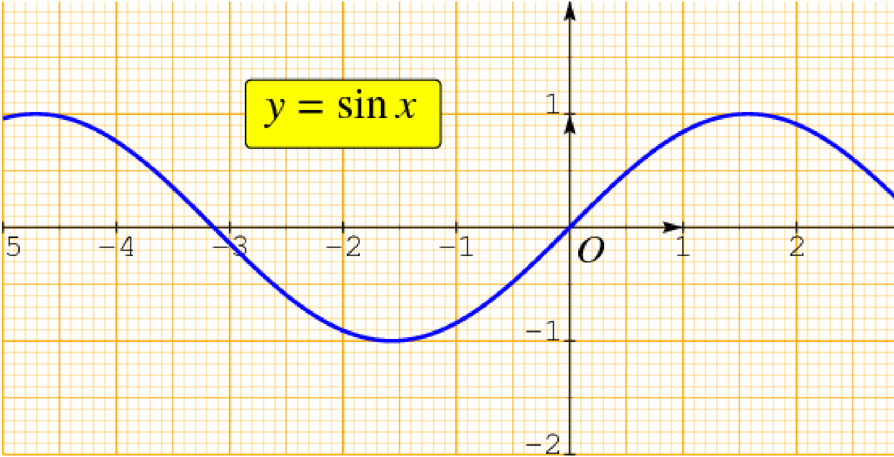
$$f^{-1}(f(x)) = x$$

En dérivant cette expression, nous obtenons :

$$f^{'}(x)(f^{-1})^{'}(f(x)) = 1$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Sinus



Définition

La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans [-1 ;1] est continue et strictement croissante, donc elle admet une bijection réciproque définie sur $[-1; 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ appelée Arc sinus et notée Arcsin. Elle est strictement croissante (cf chapitre précédent) sur $[-1; 1]$. Elle est continue sur $[-1; 1]$ mais dérivable sur $]-1; 1[$ car la dérivée de sinus s'annule en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Lecture

$$y = \mathrm{Arcsin}(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

se lit donc "y est l'arc dont le sinus vaut x et $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$"
donc

Lecture

$$y = \mathrm{Arcsin}(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

se lit donc "y est l'arc dont le sinus vaut x et $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$"
donc

$$\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

ATTENTION

La fonction Arcsin n'est pas la bijection réciproque de la fonction sinus mais celle de sa restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc par exemple :

$$\sin\left(\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$$

mais
$\mathrm{Arcsin}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ car c'est l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ayant le même sinus que $\frac{3\pi}{4}$.

Attention

$$\text{Arcsin}\left(\sin(\theta)\right) = \theta \quad \textit{QUE SI} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Attention

$$\mathrm{Arcsin}\,(\sin(\theta)) = \theta \quad \textit{QUE SI} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\mathrm{Arcsin}(\theta) = \theta \quad \forall \theta \in [-1, 1]$$

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$$

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$$

or $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) + \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1$

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$$

or $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) + \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1$
donc $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$.

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$$

or $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) + \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1$
donc $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$.
Comme $\operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a donc $\cos(\operatorname{Arcsin} x) \geq 0$ d'où $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$. D'où :

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Parité

Arcsin est impaire car c'est la bijection réciproque d'une fonction impaire. On peut donc réduire l'étude à $[0; 1]$.

Parité

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$$

Parité

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$$

$$D_f = [-1, 1]$$

Parité

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$$

$$D_f = [-1, 1]$$

$$\text{si} \quad x \in D_f \quad \text{alors} \quad -x \in D_f$$

Parité

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$$

$$D_f = [-1, 1]$$

$$\text{si} \quad x \in D_f \quad \text{alors} \quad -x \in D_f$$

$f(-x) = \mathrm{Arcsin}(-x)$ donc
$sin(f(-x)) = -x = -sin(f(x)) = sin(-f(x))$ puisque la fonction sinus est impaire

Parité

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$$

$$D_f = [-1, 1]$$

$$\text{si} \quad x \in D_f \quad \text{alors} \quad -x \in D_f$$

$f(-x) = \mathrm{Arcsin}(-x)$ donc
$sin(f(-x)) = -x = -sin(f(x)) = sin(-f(x))$ puisque la fonction sinus est impaire
comme $f(x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et $-f(x)$ aussi, nous en déduisons

Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arcsin}(0) =$$

$$\mathrm{Arcsin}(1) =$$

$$\mathrm{Arcsin}(-1) =$$

Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arcsin}(0) = 0$$

$$\mathrm{Arcsin}(1) =$$

$$\mathrm{Arcsin}(-1) =$$

Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arcsin}(0) = 0$$

$$\mathrm{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arcsin}(-1) =$$

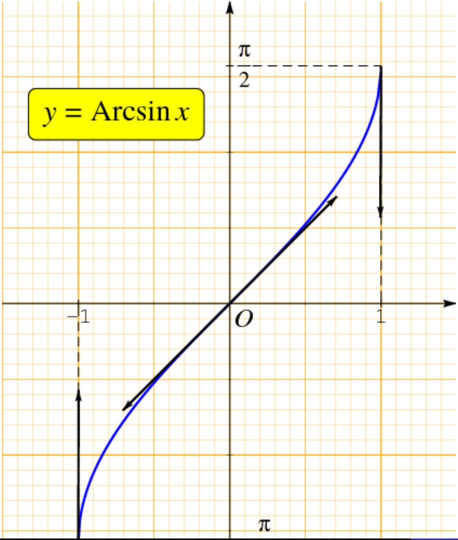
Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arcsin}(0) = 0$$

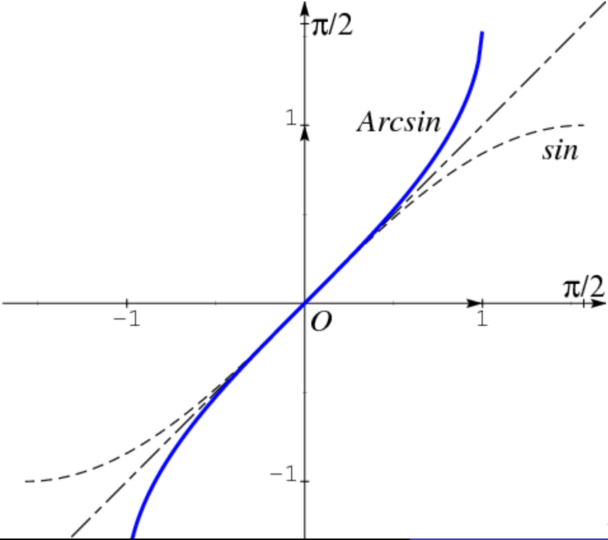
$$\mathrm{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Représentation graphique



Représentation graphique

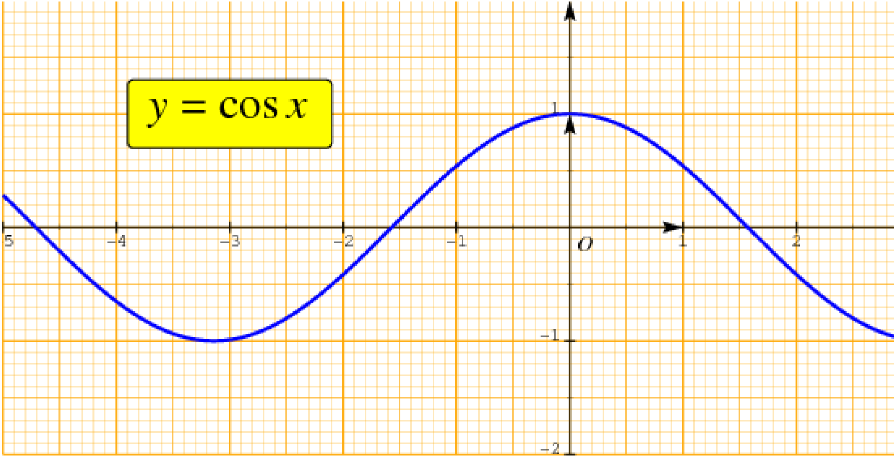


Remarque

$$M(x,y) \in \mathcal{C}_{\sin_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}} \leftrightarrow y = sin(x) \quad x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \leftrightarrow x = \mathrm{Arcsin}(y)$$

d'où la symétrie par rapport à le première bissectrice.

Cosinus



Définition

La restriction de la fonction cosinus à $[0;\pi]$ à valeurs dans [-1 ;1] est continue et strictement décroissante, donc elle admet une bijection réciproque définie sur $[-1;1]$ à valeurs dans $[0;\pi]$ appelée Arc cosinus et notée Arccos. Elle est strictement décroissante sur $[-1;1]$. Elle est continue sur $[-1;1]$ mais dérivable sur $]-1;1[$ car la dérivée de cosinus s'annule en 0 et π.

Lecture

$$y = \mathrm{Arccos}(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

se lit donc "y est l'arc dont le cosinus vaut x et $y \in [0, \pi]$" donc

Lecture

$$y = \mathrm{Arccos}(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

se lit donc "y est l'arc dont le cosinus vaut x et $y \in [0, \pi]$"
donc

$$cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

ATTENTION

La fonction Arccos n'est pas la bijection réciproque de la fonction cosinus mais celle de sa restriction à $[0;\pi]$. On a donc par exemple :

$$\cos\left(\mathrm{Arccos}\,\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Arccos}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$$

mais
$\mathrm{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ car c'est l'unique élément de $[0;\pi]$ ayant le même cosinus que $\frac{4\pi}{3}$.

Attention

$$\mathrm{Arccos}(\cos(\theta)) = \theta \quad \textit{SI} \quad \theta \in [0; \pi]$$

Attention

$$\mathrm{Arccos}(\cos(\theta)) = \theta \quad \textit{SI} \quad \theta \in [0;\pi]$$

$$\cos(\mathrm{Arccos}(\theta) = \theta \quad \forall \theta \in [-1, 1]$$

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arccos}' x = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{-1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)}$$

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[,\ \mathrm{Arccos}'\, x = \frac{1}{\cos'(\mathrm{Arccos}\, x)} = \frac{-1}{\sin(\mathrm{Arccos}\, x)}$$

or $\cos^2(\mathrm{Arccos}\, x) + \sin^2(\mathrm{Arccos}\, x) = 1$

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arccos}' x = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{-1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)}$$

or $\cos^2(\operatorname{Arccos} x) + \sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1$
donc $\sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1 - x^2$.

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arccos}' x = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{-1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)}$$

or $\cos^2(\operatorname{Arccos} x) + \sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1$
donc $\sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1 - x^2$.
Comme $\operatorname{Arccos} x \in [0;\pi]$ on a donc $\sin(\operatorname{Arccos} x) \geq 0$ d'où $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$. D'où :

Dérivée

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arccos}' x = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{-1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)}$$

or $\cos^2(\operatorname{Arccos} x) + \sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1$
donc $\sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1 - x^2$.
Comme $\operatorname{Arccos} x \in [0;\pi]$ on a donc $\sin(\operatorname{Arccos} x) \geq 0$ d'où $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$. D'où :

$$\forall x \in]-1;1[, \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Attention

Arccos n'est ni paire ni impaire.

Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arccos}(0) =$$

$$\mathrm{Arccos}(1) =$$

$$\mathrm{Arccos}(-1) =$$

Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arccos}(1) =$$

$$\mathrm{Arccos}(-1) =$$

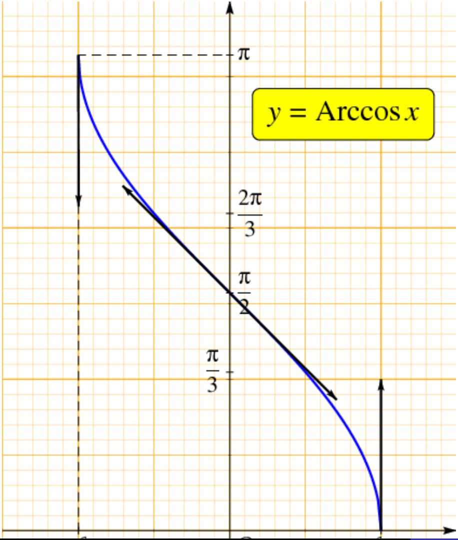
Valeurs remarquables

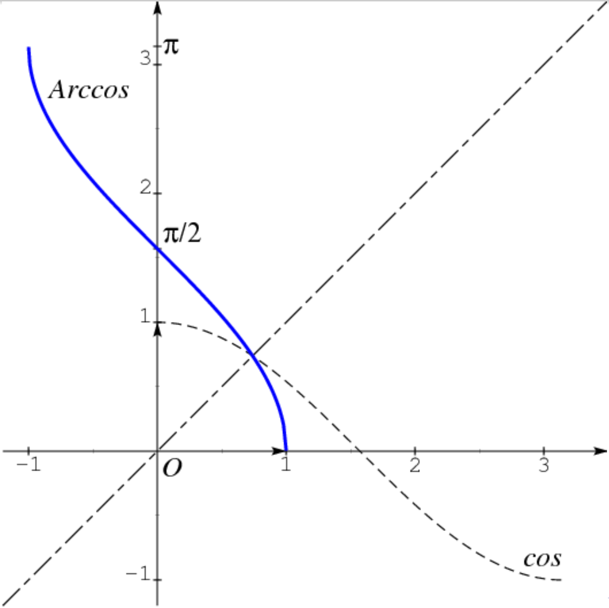
$$\mathrm{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arccos}(1) = 0$$

$$\mathrm{Arccos}(-1) = \pi$$

Représentation graphique




π
3
Arccos
2
π/2
1
−1
O
1
2
3
−1
cos

Exemple

Montrer de deux manières différentes que :
$\forall x \in [-1;1], \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$

Méthode 1

$$f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$$

Méthode 1

$$f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$$

f est une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$

Méthode 1

$$f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$$

f est une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f'(x) = 0$$

Méthode 1

$$f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$$

f est une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f'(x) = 0$$

Donc f est constante sur $]-1, 1[$ et vaut $f(0) = \frac{\pi}{2} + 0$

Méthode 1

$$f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$$

f est une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f'(x) = 0$$

Donc f est constante sur $]-1, 1[$ et vaut $f(0) = \frac{\pi}{2} + 0$ et $f(1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$

Méthode 2

$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in [0, \pi]$

Méthode 2

$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in [0, \pi]$
$cos(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x) = sin(\operatorname{Arcsin} x) = x = cos(\operatorname{Arccos} x)$

Méthode 2

$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in [0, \pi]$
$cos(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x) = sin(\operatorname{Arcsin} x) = x = cos(\operatorname{Arccos} x)$
donc $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos}(x)$

Définition

La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $]-\infty; +\infty[$ est continue et strictement croissante, donc elle admet une bijection réciproque définie sur $]-\infty; +\infty[$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ appelée Arc tangente et notée Arctan. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Lecture

$$y = \operatorname{Arctan} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se lit donc "y est l'arc dont la tangente vaut x et $y \in]\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$" donc

Lecture

$$y = \mathrm{Arctan}\, x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se lit donc "y est l'arc dont la tangente vaut x et $y \in]\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$" donc

$$tan(\mathrm{Arctan}\, x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ATTENTION

La fonction Arctan n'est pas la bijection réciproque de la fonction tangente mais celle de sa restriction à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On a donc par exemple :

$$\tan\left(\mathrm{Arctan}\,5\right)=5$$
$$\mathrm{Arctan}\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}$$

mais
$\mathrm{Arctan}\left(\tan\frac{8\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}$ car c'est l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ayant la même tangente que $\frac{8\pi}{7}$.

Dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}' x = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}\, x)}$$

D'où :

Dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}' x = \frac{1}{\tan' (\mathrm{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 (\mathrm{Arctan}\, x)}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}' x = \frac{1}{1 + x^2}$$

Parité

Arctan est impaire car c'est la bijection réciproque d'une fonction impaire.

Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arctan}(0) =$$

$$\mathrm{Arctan}(1) =$$

$$\mathrm{Arctan}(-1) =$$

Valeurs remarquables

$$\mathrm{Arctan}(0) = 0$$

$$\mathrm{Arctan}(1) =$$

$$\mathrm{Arctan}(-1) =$$

Valeurs remarquables

$$\text{Arctan}(0) = 0$$

$$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arctan}(-1) =$$

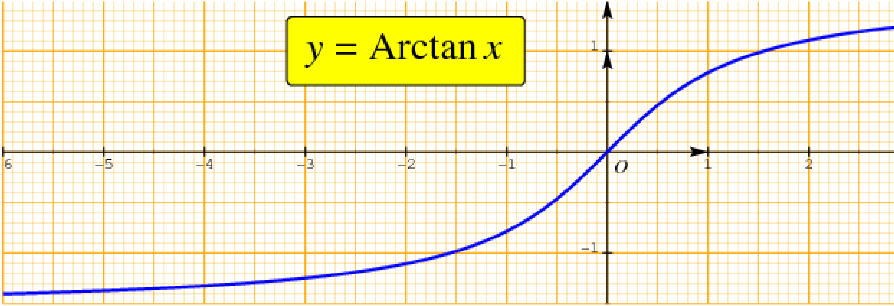
Valeurs remarquables

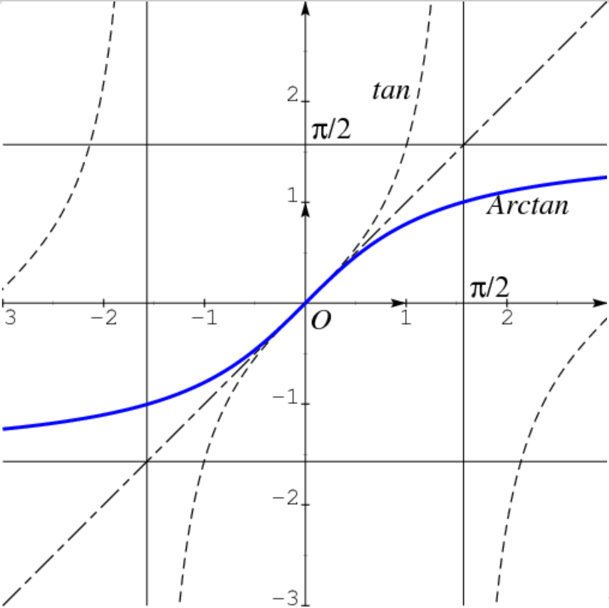
$$\mathrm{Arctan}(0) = 0$$

$$\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Représentation graphique




tan
Arctan
π/2
π/2
O
2
1
−1
−2
−3
3
−2
−1
1
2

Exemple

Montrer que :

1. $\forall x > 0, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
2. $\forall x < 0, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

Exemple 1

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

Exemple 1

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

f est une fonction définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

Exemple 1

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

f est une fonction définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Exemple 1

$$f(x) = \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x}$$

f est une fonction définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Donc f est constante pour $x > 0$ et vaut $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Exemple 2

En procédant de même pour les réels strictement négatifs, nous obtenons :

Exemple 2

En procédant de même pour les réels strictement négatifs, nous obtenons :

$$\forall x < 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Exemple 2

En procédant de même pour les réels strictement négatifs, nous obtenons :

$$\forall x < 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Donc f est constante pour $x < 0$ et vaut
$f(-1) = \frac{-\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} = \frac{-\pi}{2}$

Généralités

Ils existent des bijections réciproques pour chacune des fonctions ch définie de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ qui est alors bijective, pour sh de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et th définie de $\mathbb{R}$ dans $]-1; 1[$. On peut donc créer leurs bijections réciproques appelées respectivement argument cosinus hyperbolique, notée Argch, argument sinus hyperbolique, notée Argsh et argument tangente hyperbolique notée Argth.

Exemple

Montrer que :

1. Pour tout $x \geq 1, \operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
3. Pour tout $x \in]-1;1[, \operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Expression logarithmique 1

Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times [0, +\infty$, on a

Expression logarithmique 1

Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times[0, +\infty$, on a

$$y = \mathrm{Argch}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{ch}(y) \leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$$

Expression logarithmique 1

Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times[0, +\infty$, on a

$$y = \mathrm{Argch}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{ch}(y) \leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y + e^{-y}$$

Expression logarithmique 1

Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times[0, +\infty$, on a

$$y = \mathrm{Argch}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{ch}(y) \leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y + e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} + 1$$

Expression logarithmique 1

Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times [0, +\infty$, on a

$$y = \mathrm{Argch}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{ch}(y) \leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y + e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

Expression logarithmique 1

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles (ici $x > 1$) qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Expression logarithmique 1

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles (ici $x > 1$) qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$
Dans notre contexte, $y \geq 0 \quad e^y \geq 1$

Expression logarithmique 1

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles (ici $x > 1$) qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$
Dans notre contexte, $y \geq 0 \quad e^y \geq 1$
Or $0 \leq Y_1 \leq 1 \leq Y_2$ puisque $Y_1 Y_2 = 1 \quad Y_1 + Y_2 = 2x \geq 0$

Expression logarithmique 1

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles (ici $x > 1$) qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$
Dans notre contexte, $y \geq 0 \quad e^y \geq 1$
Or $0 \leq Y_1 \leq 1 \leq Y_2$ puisque $Y_1 Y_2 = 1 \quad Y_1 + Y_2 = 2x \geq 0$
Ainsi $y = \mathrm{Argch}(x) \Leftrightarrow e^y = Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Expression logarithmique 1

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles (ici $x > 1$) qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$
Dans notre contexte, $y \geq 0 \quad e^y \geq 1$
Or $0 \leq Y_1 \leq 1 \leq Y_2$ puisque $Y_1 Y_2 = 1 \quad Y_1 + Y_2 = 2x \geq 0$
Ainsi $y = \mathrm{Argch}(x) \Leftrightarrow e^y = Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Expression logarithmique 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

Expression logarithmique 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$y = \mathrm{Argsh}(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{sh}(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

Expression logarithmique 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$y = \mathrm{Argsh}(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{sh}(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

Expression logarithmique 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$y = \operatorname{Argsh}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{sh}(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1$$

Expression logarithmique 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$y = \mathrm{Argsh}(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{sh}(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Expression logarithmique 2

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2+1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2+1}$

Expression logarithmique 2

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2+1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2+1}$
$Y_1 < 0 \quad Y_2 > 0$ en multipliant par les conjugués

Expression logarithmique 2

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles qui sont :

$Y_1 = x - \sqrt{x^2+1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2+1}$

$Y_1 < 0 \quad Y_2 > 0$ en multipliant par les conjugués

Dans notre contexte, $y \geq 0 \quad e^y \geq 1$

Expression logarithmique 2

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles qui sont :

$Y_1 = x - \sqrt{x^2+1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2+1}$

$Y_1 < 0 \quad Y_2 > 0$ en multipliant par les conjugués

Dans notre contexte, $y \geq 0 \quad e^y \geq 1$

Ainsi $y = \mathrm{Argsh}(x) \Leftrightarrow e^y = Y_2 = x + \sqrt{x^2+1}$

Expression logarithmique 2

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ d'inconnue Y admet deux solutions réelles qui sont :
$Y_1 = x - \sqrt{x^2+1} \quad Y_2 = x + \sqrt{x^2+1}$
$Y_1 < 0 \quad Y_2 > 0$ en multipliant par les conjugués
Dans notre contexte, $y \geq 0 \quad e^y \geq 1$
Ainsi $y = \mathrm{Argsh}(x) \Leftrightarrow e^y = Y_2 = x + \sqrt{x^2+1}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{Argsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Expression logarithmique 3

Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}$, on a

Expression logarithmique 3

Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}$, on a
$y = \mathrm{Argth}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{th}(y) \leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

Expression logarithmique 3

Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$, on a
$y = \mathrm{Argth}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{th}(y) \leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$
$\leftrightarrow (e^{2y}+1)x = e^{2y} - 1$

Expression logarithmique 3

Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$, on a
$y = \mathrm{Argth}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{th}(y) \leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$
$\leftrightarrow (e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1$
$\leftrightarrow (e^{2y}x + x = e^{2y} - 1 \leftrightarrow x + 1 = e^{2y}(1 - x)$

Expression logarithmique 3

Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$, on a

$y = \mathrm{Argth}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{th}(y) \leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$\leftrightarrow (e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1$

$\leftrightarrow (e^{2y}x + x = e^{2y} - 1 \leftrightarrow x + 1 = e^{2y}(1 - x)$

$\leftrightarrow (e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \leftrightarrow y = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x})$

Expression logarithmique 3

Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$, on a
$y = \mathrm{Argth}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{th}(y) \leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$
$\leftrightarrow (e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1$
$\leftrightarrow (e^{2y}x + x = e^{2y} - 1 \leftrightarrow x + 1 = e^{2y}(1 - x)$
$\leftrightarrow (e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \leftrightarrow y = \frac{1}{2}ln(\frac{1+x}{1-x})$
Ainsi $x \in]-1; 1[, y = \mathrm{Argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exemples

1. $\mathrm{Arcsin}(\sin(\frac{18\pi}{5}) =$
2. $\cos(\mathrm{Arccos}(\frac{1}{2}) =$
3. Arccos est une fonction définie pour $x \in$
4. Arcsin est une fonction dérivable sur

Exemples

1. $\mathrm{Arcsin}(\sin(\frac{18\pi}{5}) = \frac{-2\pi}{5}$
2. $\cos(\mathrm{Arccos}(\frac{1}{2}) =$
3. Arccos est une fonction définie pour $x \in$
4. Arcsin est une fonction dérivable sur

Exemples

1. $\mathrm{Arcsin}(\sin(\frac{18\pi}{5}) = \frac{-2\pi}{5}$
2. $\cos(\mathrm{Arccos}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
3. Arccos est une fonction définie pour $x \in$
4. Arcsin est une fonction dérivable sur

Exemples

1. $\mathrm{Arcsin}(\sin(\frac{18\pi}{5}) = \frac{-2\pi}{5}$
2. $\cos(\mathrm{Arccos}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
3. Arccos est une fonction définie pour $x \in [-1, 1]$
4. Arcsin est une fonction dérivable sur

Exemples

1. $\mathrm{Arcsin}(\sin(\frac{18\pi}{5}) = \frac{-2\pi}{5}$
2. $\cos(\mathrm{Arccos}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
3. Arccos est une fonction définie pour $x \in$
4. Arcsin est une fonction dérivable sur $]-1,1[$

Exemple

Montrer que :

1. Pour tout $x > 1, \mathrm{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
3. Pour tout $x \in]-1;1[, \mathrm{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$

Dérivée 1

$$\forall x \in]1, +\infty[, \operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch} x)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)}$$

Dérivée 1

$$\forall x \in]1, +\infty[, \operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch} x)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch} x) = 1$

Dérivée 1

$$\forall x \in]1,+\infty[, \operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch} x)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch} x) = 1$
donc $\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch} x) = x^2 - 1$.

Dérivée 1

$$\forall x \in]1,+\infty[, \operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch} x)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch} x) = 1$
donc $\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch} x) = x^2 - 1$.
Comme $\operatorname{Argch} x \geq 0$ on a donc $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) \geq 0$ d'où
$\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) = \sqrt{x^2-1}$. D'où :

Dérivée 1

$$\forall x \in]1, +\infty[, \operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}' (\operatorname{Argch} x)} = \frac{1}{\operatorname{sh} (\operatorname{Argch} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2 (\operatorname{Argch} x) - \operatorname{sh}^2 (\operatorname{Argch} x) = 1$
donc $\operatorname{sh}^2 (\operatorname{Argch} x) = x^2 - 1$.
Comme $\operatorname{Argch} x \geq 0$ on a donc $\operatorname{sh} (\operatorname{Argch} x) \geq 0$ d'où $\operatorname{sh} (\operatorname{Argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$. D'où :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Dérivée 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}$$

Dérivée 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1$

Dérivée 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1$
donc $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1 + x^2$.

Dérivée 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1$
donc $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1 + x^2$.
Comme $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) \geq 0$ d'où $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) = \sqrt{1+x^2}$.
D'où :

Dérivée 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}$$

or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1$
donc $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1 + x^2$.
Comme $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) \geq 0$ d'où $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) = \sqrt{1+x^2}$.
D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Dérivée 3

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Argth}' x = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{Argth} x)} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{Argth} x)}$$

D'où :

Dérivée 3

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Argth}' x = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{Argth} x)} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{Argth} x)}$$

D'où :

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

Exemple

Déterminer $\operatorname{ch}(\operatorname{Argch} x)$ pour $x \in [1; +\infty[$ et $\operatorname{Argch}(\operatorname{ch} x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, en discutant si nécessaire.

Exemple

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}\, x) = x \text{ pour } x \in [1; +\infty[$$

Exemple

$\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}\, x) = x$ pour $x \in [1; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x))$

Exemple

$\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}\, x) = x$ pour $x \in [1; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x))$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) \geq 1\} = \mathbb{R}$

Exemple

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}\, x) = x \text{ pour } x \in [1; +\infty[$$
$$f(x) = \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x))$$
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) \geq 1\} = \mathbb{R}$$
$$y = \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) \to ch(y) = ch(x) \to y = x \quad \mathrm{ou} y = -x$$

Exemple

$\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}\, x) = x$ pour $x \in [1; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x))$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) \geq 1\} = \mathbb{R}$
$y = \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) \rightarrow ch(y) = ch(x) \rightarrow y = x \quad \mathrm{ou} y = -x$
$\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = |x|$

Exemple

Étudier la fonction $f : x \mapsto x \operatorname{Argsh} x$

Exemple

$D_f = \mathbb{R}$

Exemple

$D_f = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)(-\operatorname{Argsh}(x) = f(x)$, donc f est paire

Exemple

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)(-\operatorname{Argsh}(x) = f(x)$, donc

f est paire

Etude sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \operatorname{Argsh}(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$

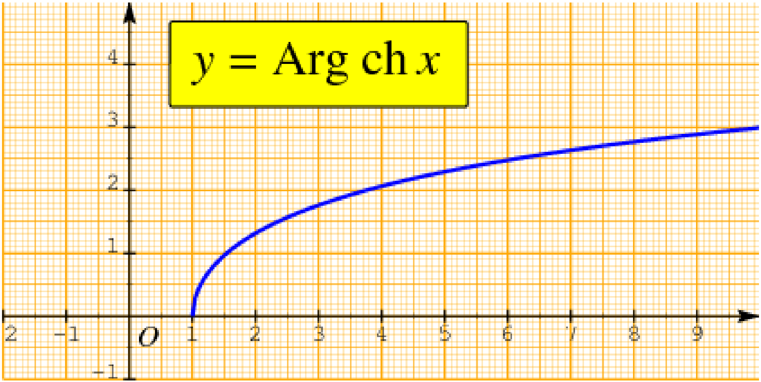
Exemple

$D_f = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)(-\operatorname{Argsh}(x) = f(x)$, donc
f est paire
Etude sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \operatorname{Argsh}(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$
Ainsi la fonction est croissante sur $[0, +\infty[$, et
$f(0) = 0 \quad \mathrm{limite} f(x) = +\infty$

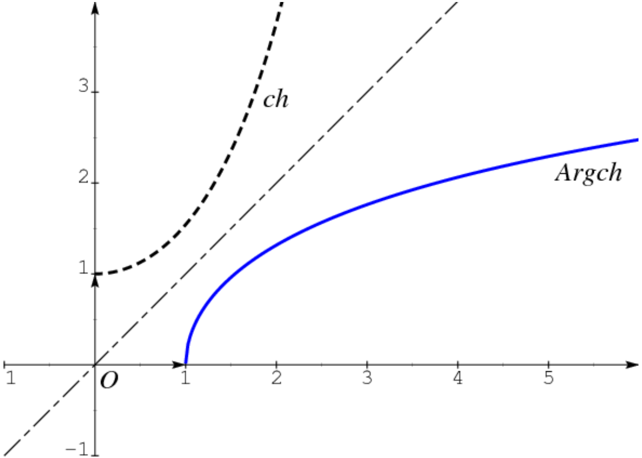
Exemple

$D_f = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)(-\operatorname{Argsh}(x) = f(x)$, donc
f est paire
Etude sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \operatorname{Argsh}(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$
Ainsi la fonction est croissante sur $[0, +\infty[$, et
$f(0) = 0 \quad \mathrm{limite} f(x) = +\infty$
l'axe des ordonnées est une branche infinie

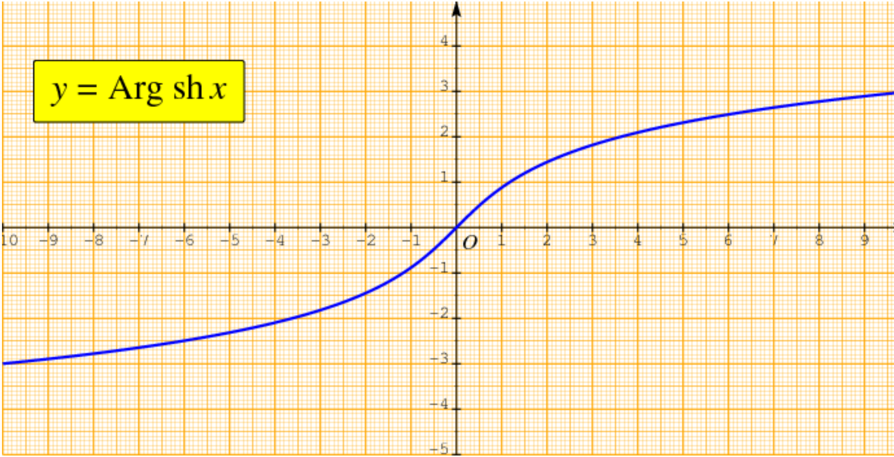
Représentation graphique



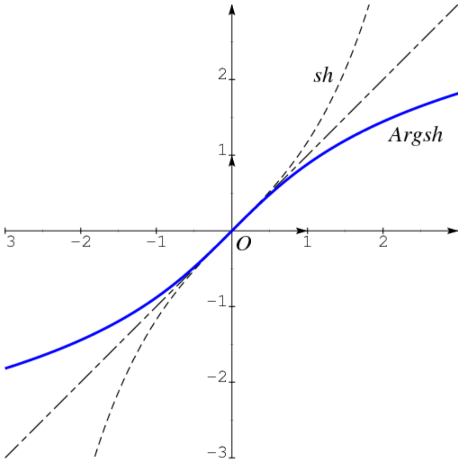
Représentation graphique



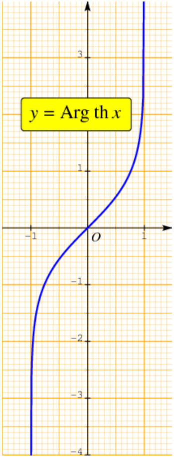
Représentation graphique



Représentation graphique



Représentation graphique



Représentation graphique