Esapces vectoriels

Cours 1

Exemples

Soit E un ensemble et une loi $\oplus$ qui opère entre deux éléments de E.
Dans chaque cas prendre deux élements u et v de E, et calculer $u \oplus v$.

- $E = \mathbb{R}^2$ et $\oplus$ est l'addition usuelle de $\mathbb{R}^2$.
- $E = \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \oplus (x', y') = (x + y', x' + y)$.
- $E = \mathbb{R}^2$ et $\oplus$ est le produit scalaire.
- $E = \mathbb{R}$ et $u \oplus v = u \times v + (u^2 - 1)(v^2 - 1)$

Examples

- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1,1) \oplus (0,2) = (1,3)$

Examples

- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1, 1) \oplus (0, 2) = (1, 3)$
- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1, 1) \oplus (0, 2) = (3, 1)$

Examples

- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1,1) \oplus (0,2) = (1,3)$
- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1,1) \oplus (0,2) = (3,1)$
- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1,1) \oplus (0,2) = 1 * 0 + 1 * 2 = 2$

Examples

- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1,1) \oplus (0,2) = (1,3)$
- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1,1) \oplus (0,2) = (3,1)$
- $E = \mathbb{R}^2$ and $(1,1) \oplus (0,2) = 1 * 0 + 1 * 2 = 2$
- $E = \mathbb{R}$ and $2 \oplus 2 = 4 + 9 = 13$

Definition

On dit que E muni de la loi $\oplus$ (on note $(E, \oplus)$) est un groupe commutatif, si $(E, \oplus)$ vérifie les 5 conditions ci-dessous :

(A0)

$$\forall (u, v) \in E^2, u \oplus v \in E$$

On dit que la loi $\oplus$ est interne.

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$ and $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$.
Ici :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \oplus (x', y') \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 2

$E = \mathbb{R}^2$ and $(x, y) \oplus (x', y') = (x + y', x' + y)$
Ici :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \oplus (x', y') \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 3

$E = \mathbb{R}^2$ et $\oplus$ est le produit scalaire.

- la loi n'est pas une lci car $u.v = xx' + yy'$ appartient $\mathbb{K}$

Exemple 4

$E = \mathbb{R}$ et $u \oplus v = u \times v + (u^2 - 1)(v^2 - 1)$

- Ici : $u \in \mathbb{R} \quad v \in \mathbb{R} \quad u \oplus v \in \mathbb{R}$

Definition

On dit que E muni de la loi $\oplus$ (on note $(E, \oplus)$) est un groupe commutatif, si $(E, \oplus)$ vérifie les 5 conditions ci-dessous :

(A0)

$$\forall (u, v) \in E^2, u \oplus v \in E$$

On dit que la loi $\oplus$ est interne.

(A1)

$$\forall (u, v) \in E^2, u \oplus v = v \oplus u$$

On dit que la loi $\oplus$ est commutative.

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$ and $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$.

- Ici :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \oplus (x', y') \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$ and $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$.

- Ici :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \oplus (x', y') \in \mathbb{R}^2$$

- commutativité :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = (x', y') \oplus (x, y$$

Exemple 2

$E = \mathbb{R}^2$ and $(x, y) \oplus (x', y') = (x + y', x' + y)$

- Ici :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \oplus (x', y') \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 2

$E = \mathbb{R}^2$ and $(x, y) \oplus (x', y') = (x + y', x' + y)$

- Ici :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \oplus (x', y') \in \mathbb{R}^2$$

- cette loi n'est pas commutative

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x+y', x'+y) \quad (x', y') \oplus (x, y) = (x'+y, x+y')$$

$$(1, 2) \oplus (3, 5) = (1+5, 2+3) \quad (3, 5) \oplus (1, 2) = (3+2, 5+1)$$

Exemple 4

$E = \mathbb{R}$ and $u \oplus v = u \times v + (u^2 - 1)(v^2 - 1)$

- Ici : $u \in \mathbb{R} \quad v \in \mathbb{R} \quad u \oplus v \in \mathbb{R}$

Exemple 4

$E = \mathbb{R}$ and $u \oplus v = u \times v + (u^2 - 1)(v^2 - 1)$

- Ici : $u \in \mathbb{R} \quad v \in \mathbb{R} \quad u \oplus v \in \mathbb{R}$
- cette loi est commutative car

$$u \oplus v = u \times v + (u^2 - 1)(v^2 - 1) = v \times u + (v^2 - 1)(u^2 - 1) = v \oplus u$$

Definition

On dit que E muni de la loi $\oplus$ (on note $(E, \oplus)$) est un groupe commutatif, si $(E, \oplus)$ vérifie les 5 conditions ci-dessous :

(A0)

$$\forall (u, v) \in E^2, u \oplus v \in E$$

On dit que la loi $\oplus$ est interne.

(A1)

$$\forall (u, v) \in E^2, u \oplus v = v \oplus u$$

On dit que la loi $\oplus$ est commutative.

(A2)

$$\forall (u, v, w) \in E^3, (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$$

On dit que la loi $\oplus$ est associative

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$.

- associativité : $((x, y) \oplus (x', y')) \oplus (x'', y'')) = (x + x', y + y') \oplus (x'', y'') = (x + x' + x\text{''}, y + y' + y'')$

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$.

- associativité : $((x, y) \oplus (x', y')) \oplus (x'', y'')) =$
  $(x + x', y + y') \oplus (x'', y'') = (x + x' + x", y + y' + y'')$

$(x, y) \oplus ((x', y')) \oplus (x'', y'')) =$
$(x, y) \oplus (x' + x'', y' + y'') = (x + x' + x", y + y' + y'')$

Exemple 4

$E = \mathbb{R}$ and $u \oplus v = u \times v + (u^2 - 1)(v^2 - 1)$

- l'associativité n'est pas vérifiée

$$(0 \oplus 2) \oplus 2 = (-3) \oplus 2 = -6 + 24 = 18$$

$$0 \oplus (2 \oplus 2) = 0 \oplus (4 + 9) = 0 \oplus 13 = -168$$

Definition

On dit que E muni de la loi $\oplus$ (on note $(E, \oplus)$) est un groupe commutatif, si $(E, \oplus)$ vérifie les 5 conditions ci-dessous :

(A3) Il existe un élément dit **neutre** pour la loi $\oplus$ noté 0_E et appelé vecteur nul, tel que

$$\forall u \in E, 0_E \oplus u = u$$

(A4) Chaque élément de E, possède par la loi $\oplus$ ce qu'on appelle un symétrique, noté $-u$ tel que

$$\forall u \in E, u \oplus (-u) = 0_E$$

Plutôt que d'écrire $u + (-u) = 0_E$ on peut écrire par extrapolation avec la soustraction des nombres réels : $u - u = 0_E$

Exemple 1

- élément neutre

$$(x, y) \oplus (0, 0) = (x, y)$$

Exemple 1

- élément neutre

$$(x, y) \oplus (0, 0) = (x, y)$$

- élément symétrique

$$(x, y) \oplus (-x, -y) = (0, 0) = (-x, -y) \oplus (x, y)$$

Espace vectoriel

Tout nombre appartenant à $\mathbb{K}$ est appelé scalaire.
On munit E d'une loi notée $\odot$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout u de E, on note $\lambda \odot u$ le produit de u par λ.

Espace vectoriel

Tout nombre appartenant à $\mathbb{K}$ est appelé scalaire.
On munit E d'une loi notée $\odot$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout u de E, on note $\lambda \odot u$ le produit de u par λ.
E est ainsi muni de deux opérations, $\oplus$ et $\odot$.

Espace vectoriel

Tout nombre appartenant à $\mathbb{K}$ est appelé scalaire.
On munit E d'une loi notée $\odot$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout u de E, on note $\lambda \odot u$ le produit de u par λ.
E est ainsi muni de deux opérations, $\oplus$ et $\odot$.

On dit que E muni des lois $\oplus$ et $\odot$, (on note $(E, \oplus, \odot)$) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, ou on dit aussi que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, si $(E, \oplus, \odot)$ vérifie les 6 conditions ci-dessous :

Vector space

(A00)

$$(E, \oplus) \text{ est un groupe commutatif.}$$

Vector space

(A00)

$$(E, \oplus) \text{ est un groupe commutatif.}$$

(M0)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \alpha \odot u \in E$$

On dit que la loi $\odot$ est externe. Cette loi est dite externe car on multiplie un scalaire par un élément de E

Vector space

(A00)

$$(E, \oplus) \text{ est un groupe commutatif.}$$

(M0)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \alpha \odot u \in E$$

On dit que la loi $\odot$ est externe. Cette loi est dite externe car on multiplie un scalaire par un élément de E

(M1)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$$

Vector space

(M2)

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$$

Vector space

(M2)

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$$

(M3)

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha\beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$$

Vector space

(M2)

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$$

(M3)

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha\beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$$

(M4)

$$\forall u \in E, 1 \odot u = u$$

Exemple

- Prouver que $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un ev.
- Prouver que $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ n'est pas un ev pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(x, y) = (x + \lambda, y + \lambda)$.

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda[(x,y)+(x',y')] = \lambda(x+x', y+y') = (\lambda(x+x'), \lambda(y+y') = \lambda(x,y) + \lambda(x',y')$

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda[(x, y) + (x', y')] = \lambda(x + x', y + y') = (\lambda(x + x'), \lambda(y + y') = \lambda(x, y) + \lambda(x', y')$
- $(\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda[(x, y) + (x', y')] = \lambda(x + x', y + y') = (\lambda(x + x'), \lambda(y + y') = \lambda(x, y) + \lambda(x', y')$
- $(\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$
- $(\alpha\beta)(x, y) = (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = \alpha(\beta(x, y))$

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda[(x, y) + (x', y')] = \lambda(x + x', y + y') = (\lambda(x + x'), \lambda(y + y') = \lambda(x, y) + \lambda(x', y')$
- $(\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$
- $(\alpha\beta)(x, y) = (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = \alpha(\beta(x, y))$
- $1(x, y) = (1 * x, 1 * y) = (x, y)$

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda[(x, y)+(x', y')] = \lambda(x+x', y+y') = (x+x'+\lambda, y+y'+\lambda)$

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda[(x, y)+(x', y')] = \lambda(x+x', y+y') = (x+x'+\lambda, y+y'+\lambda)$
- or $\lambda(x, y) + \lambda(x', y') = (x + \lambda, y + \lambda) + (x' + \lambda, y' + \lambda) = (x + x' + 2\lambda, y + y' + 2\lambda)$

Exemple

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda[(x,y)+(x',y')] = \lambda(x+x', y+y') = (x+x'+\lambda, y+y'+\lambda)$
- or $\lambda(x,y) + \lambda(x',y') = (x+\lambda, y+\lambda) + (x'+\lambda, y'+\lambda) = (x+x'+2\lambda, y+y'+2\lambda)$
- M_1 (sauf si λ est zéro) n'est pas vérifié donc ce n'est pas un ev

Exemple

Attention, la structure d'espace vectoriel c'est à dire les opérations dont on munit l'ensemble E, peut faire de lui ou non, un espace vectoriel, comme on peut le voir dans l'exemple précédent.

Vecteurs

Les éements de l'espace vectoriel E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.
Dans $\mathbb{R}^n$, on utilise souvent la notation avec une flèche sur les vecteurs, mais cette notation n'est pas toujours conservée car comme on le verra dans les exercices, des vecteurs peuvent être des fonctions.

Proposition : exemple fondamental

$\mathbb{R}^n$ muni de l'addition usuelle $+$ aet de la multiplication usuelle par un scalaire $\cdot$ est un $\mathbb{R}$ ev.

Propriétés usuelles dans un espace vetoriel

- $\forall u \in E,\ 0 \odot u = 0_E$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \odot 0_E = 0_E$
- Pour tout $u \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \odot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0 \ \text{ ou } \ u = 0_E$
- Pour tout $u \in E$, $(-1) \odot u = -u$

Preuve

- $(0+0) \odot u = 0 \odot u \oplus 0 \odot u = 0 \odot u \Rightarrow 0 \odot u = 0_E$

Preuve

- $(0+0)\odot u = 0\odot u \oplus 0\odot u = 0\odot u \Rightarrow 0\odot u = 0_E$
- $\lambda\odot 0_E = \lambda\odot(0_E\oplus 0_E) = \lambda\odot 0_E \oplus \lambda\odot 0_E \Rightarrow \lambda\odot 0_E = 0_E$

Preuve

- $(0+0) \odot u = 0 \odot u \oplus 0 \odot u = 0 \odot u \Rightarrow 0 \odot u = 0_E$
- $\lambda \odot 0_E = \lambda \odot (0_E \oplus 0_E) = \lambda \odot 0_E \oplus \lambda \odot 0_E \Rightarrow \lambda \odot 0_E = 0_E$
- $\lambda \odot u = 0_E$ and if $\lambda \neq 0$ multipliying by λ^{-1}, we get $\lambda^{-1}(\lambda \odot u) = (\lambda^{-1}\lambda) \odot u = 1 \odot u = u = 0_E$ so either $\lambda = 0$ or $u = 0_E$