LES ESPACES VECTORIELS

Objectifs
- **Savoir ce qu'est un espace vectoriel.**
- **Savoir ce qu'est un sous-espace vectoriel.**
- **Savoir ce qu'est une base.**
- **Le travail sur les espaces vectoriels de dimension finie**

Dans tout ce chapitre, on utilise de façon générique un ensemble $\mathbb{K}$ qui représente soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

$E_1 \times E_2 \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \in E_i\}$.

Exemple 1.
Décrire $\mathbb{R}^3$.

1 Les espaces vectoriels

1.1 Les groupes

Soit E un ensemble et une loi $\oplus$ qui opère entre deux éléments de E.

Exemple 2.
Pour les exemples suivants, déterminer deux éléments u et v de E, puis calculer $u \oplus v$.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\oplus$ est l'addition usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \oplus (x', y') = (x + y', x' + y)$.
3. $E = \mathbb{R}^2$ et $\oplus$ est le produit scalaire.
4. $E = \mathbb{R}$ et $u \oplus v = u \times v + (u^2 - 1)(v^2 - 1)$

On dit que E muni de la loi $\oplus$ (on note $(E, \oplus)$) est un groupe commutatif, si $(E, \oplus)$ vérifie les 5 conditions ci-dessous :

(A0)
$$\forall\, (u, v) \in E^2, u \oplus v \in E$$
On dit que la loi $\oplus$ est interne.

(A1)
$$\forall\, (u, v) \in E^2, u \oplus v = v \oplus u$$
On dit que la loi $\oplus$ est commutative.

(A2)
$$\forall\, (u, v, w) \in E^3, (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$$
On dit que la loi $\oplus$ est associative

(A3) Il existe un élément dit **neutre** pour la loi $\oplus$ noté 0_E et appelé vecteur nul, tel que

$$\forall u \in E, 0_E \oplus u = u$$

(A4) Chaque élément de E, possède par la loi $\oplus$ ce qu'on appelle un symétrique, noté $-u$ tel que

$$\forall u \in E, u \oplus (-u) = 0_E$$

Plutôt que d'écrire $u + (-u) = 0_E$ on peut écrire par extrapolation avec la soustraction des nombres réels : $u - u = 0_E$

Exemple 3.
Vérifier, dans chacun des exemples précédents, si $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif.

1.2 Espace vectoriel

Tout nombre appartenant à $\mathbb{K}$ est appelé scalaire.

On munit E d'une loi notée $\odot$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout u de E, on note $\lambda \odot u$ le produit de u par λ.

E est ainsi muni de deux opérations, $\oplus$ et $\odot$.

On dit que E muni des lois $\oplus$ et $\odot$, (on note $(E, \oplus, \odot)$) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, ou on dit aussi que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, si $(E, \oplus, \odot)$ vérifie les 6 conditions ci-dessous :

(A00)

$$(E, \oplus) \text{ est un groupe commutatif.}$$

(M0)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \alpha \odot u \in E$$

On dit que la loi $\odot$ est externe. Cette loi est dite externe car on multiplie un scalaire par un élément de E.

(M1)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$$

(M2)

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$$

(M3)

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha\beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$$

(M4)

$$\forall u \in E, 1 \odot u = u$$

Remarque 1.
L'addition usuelle dans $\mathbb{R}^n$ est notée $+$
La multiplication usuelle dans $\mathbb{R}^n$ est notée .

Exemple 4.

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ n'est pas un espace vectoriel avec, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \odot (x, y) = (x + \lambda, y + \lambda)$.

Remarque 2. Attention, la structure d'espace vectoriel c'est à dire les opérations dont on munit l'ensemble E, peut faire de lui ou non, un espace vectoriel, comme on peut le voir dans l'exemple précédent.

Définition 1.
Les éléments de l'espace vectoriel E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Dans $\mathbb{R}^n$, on utilise souvent la notation avec une flèche sur les vecteurs, mais cette notation n'est pas toujours conservée car comme on le verra dans les exercices, des vecteurs peuvent être des fonctions.

Proposition 1.
$\mathbb{R}^n$ muni des lois classiques $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Proposition 2.

1. $\forall u \in E,\ 0 \odot u = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \odot 0_E = 0_E$
3. Pour tout $u \in E$, $(-1) \odot u = -u$
4. Pour tout $u \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \odot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0 \ \text{ ou } \ u = 0_E$

Exemple 5.
Démontrer les propositions 1,2 et 3 ci-dessus.

2 Les sous-espaces vectoriels

Définition 2.
Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni des lois $+$ et $\cdot$

On dit que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E si F est non vide et si F muni des lois $+$ et $\cdot$ de E est lui même un espace vectoriel.

Il est nécessaire d'écrire cette définition mais elle n'apporte rien pour le moment car pour paraphraser cette définition, pour prouver qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, il faut en fait montrer que F est lui-même un espace vectoriel! La seule différence, c'est qu'ici, on n'a pas le choix des lois $+$ et $\cdot$ car elles nous sont imposées par l'espace vectoriel E. On utilise donc un autre théorème plus pratique , le voici :

Théorème 1.
Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni des lois $+$ et $\cdot$

F est un sous-espace vectoriel de E si il vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $0_E \in F$

(ii) $\forall\,(u, v) \in F^2, u + v \in F$. On dit que F est stable pour la loi $+$

(iii) $\forall u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot u \in F$. On dit que F est stable pour $\cdot$

Exemple 6.
Démontrer le théorème précédent.

Comme on peut le constater, ce théorème est nettement plus facile à mettre en place pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E. Il en existe même une version encore plus réduite :

Théorème 2.
Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni des lois $+$ et $\cdot$

F est un sous-espace vectoriel de E si il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $0_E \in F$

(ii) $\forall (u, v) \in F^2, \forall (\alpha) \in \mathbb{K}, \alpha \cdot u + v \in F$

C'est une version plus condensée du théorème précédent. Vous pouvez utiliser au choix, l'un ou l'autre de ces théorèmes.

Exemple 7.
Montrer que le plan d'équation $2x - 3y + 2z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3 Les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

3.1 Dans $\mathbb{R}^2$

Remarque 3.
$\mathbb{R}^2$ peut être interprété comme l'ensemble de tous les **points** M de coordonnées (x, y) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Mais dans ce chapitre $\mathbb{R}^2$ est considéré comme l'ensemble de tous les **vecteurs** $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 3. Sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0_E\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4.
Soit $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur directeur de la droite vectorielle D, dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$

1. D a pour équation cartésienne : $-bx + ay = 0$.
2. $D = \{(\lambda a, \lambda b),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
3. $D = \mathcal{V}ect(\vec{u})$

3.2 Dans $\mathbb{R}^3$

Remarque 4.
$\mathbb{R}^3$ peut être interprété comme l'ensemble de tous les **points** M de coordonnées (x, y, z) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Mais dans ce chapitre $\mathbb{R}^3$ est considéré comme l'ensemble de tous les **vecteurs** $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 5. Sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0_E\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$.

Proposition 6. Plans vectoriels
Soit $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $\vec{v} = (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ deux vecteurs non colinéaires, dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et P le plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.

1. P a pour équation cartésienne :
   $ax + by + cz = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
   Si $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire vu en terminale, alors (a, b, c) est un vecteur normal au plan.
2. P a pour équation paramétrique
$$\begin{cases} x = \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} \\ y = \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} \\ z = \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} \end{cases}$$
   où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
3. $P = \mathcal{V}ect(\vec{u}, \vec{v})$

Proposition 7. Droite vectorielle
Soit $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ un vecteur directeur de la droite vectorielle D, dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. D a pour système d'équations cartésiennes :
$$\begin{cases} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \end{cases}$$
   où (a,b,c) et (a',b',c') sont non colinéaires.
2. $D = \{(\lambda x_{\vec{u}}, \lambda y_{\vec{u}}, \lambda z_{\vec{u}}),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
3. $D = \mathcal{V}ect(\vec{u})$

Remarque 5.
Dans $\mathbb{R}^3$ deux droites vectorielles sont toujours coplanaires. Le parallélisme n'a pas de sens.

Exemple 8.
Donner les systèmes d'équations de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(2, -1, 3)$.

4 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 8.
L'intersection de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est lui-même un sous-espace vectoriel. En revanche, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

D'une manière générale, soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soit I un ensemble non vide et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Leur intersection $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 9.

1. Vérifier que dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
3. Montrer que l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

5 Somme de sous-espaces vectoriels

5.1 Définition et propriétés

Définition 3.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G l'ensemble noté $F+G$ des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$F+G=\{u\in E/u=f+g, f\in F, g\in G\}$$

Remarque 6. Cela signifie que tout élément de $F+G$ se décompose comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G, c'est à dire que $u\in F+G \Leftrightarrow \exists f\in F, \exists g\in G$ tels que $u=f+g$. Rien ne dit que cette décomposition est unique, en général d'ailleurs, elle ne l'est pas.

Exemple 10.
Soit D et D' deux droites de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $D+D'$.

Théorème 3.
La somme de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 11.
Démontrer le théorème précédent.

Remarque 7.
Attention à ne pas se laisser abuser par la notation $+$ et croire que l'on a ainsi défini une opération sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels. En effet, en observant les égalités suivantes, on peut éviter bien des erreurs :

1. $F+F=F$
2. En posant $-F=\{-x, x\in F\}$, on a $-F=F$
3. Si $F\subset G$, $F+G=G+G$ même si $F\neq G$

5.2 Somme directe

Définition 4.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est directe si tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Lorsque F et G sont en somme directe, on note $F+G=F\oplus G$

Exemple 12.
On considère les droites et les plans suivants. Déterminer $F+G$ et déterminer les sommes qui sont directes.

Théorème 4.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors : $F+G$ est directe $\Leftrightarrow F\cap G=\{0\}$

Exemple 13.
Démontrer le théorème précédent.

5.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si la somme $F+G$ est directe et si celle-ci vaut E. On a donc : F et G supplémentaires dans $E \Leftrightarrow E = F \oplus G$.
On dit aussi que G est un supplémentaire de F.

Théorème 5.
Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

Remarque 8.

1. Il n'y a pas unicité du supplémentaire
2. La démonstration dans le cas général de ce théorème est loin d'être anodine

Théorème 6.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple de vecteurs $f \in F$ et $g \in G$ tels que $u = f + g$.

Remarque 9. Attention, deux sous-espaces vectoriels peuvent être supplémentaires dans un espace vectoriel et pas dans un autre. Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient mais pas dans l'espace $\mathbb{R}^3$, en effet, bien que leur somme soit directe dans $\mathbb{R}^3$ leur somme directe n'est pas $\mathbb{R}^3$.

Exemple 14.
Soit $E = \mathbb{R}^3$. Vérifier que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3\right\}$ sont supplémentaires dans E.

6 Familles finies de vecteurs

6.1 Familles génératrices

Définition 6.
Soit E un espace vectoriel, et $u_1, \ldots, u_n$, n vecteurs de E.

Un vecteur u de E est une **combinaison linéaire** de $u_1, \ldots, u_n$, s'il existe n nombres $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.

Définition 7.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On dit que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ forment une **famille génératrice** de E ou qu'ils **engendrent** E, si E est l'ensemble formé par toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On dit que E est l'espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$, et l'on note $E = \mathcal{V}ect(u_1, \ldots, u_n)$.

En d'autres termes :

$$u \in \mathcal{V}ect(u_1, u_2, \ldots, u_n) \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n / u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Exemple 15. Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire de $\mathcal{V}ect(u,v)$?

Exemple 16. Trouver deux familles génératrices du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ où E est l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z)$ tels que : $x - y + z = 0$

Théorème 7. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. Alors les familles suivantes sont encore génératrices de E :

1. La famille obtenue en échangeant deux vecteurs de $\mathcal{F}$
2. La famille obtenue en multipliant un des vecteurs de $\mathcal{F}$ par un scalaire non nul.
3. La famille obtenue en ajoutant à un des vecteurs de $\mathcal{F}$ une combinaison linéaires des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.
4. La famille obtenue en retirant de $\mathcal{F}$ un vecteur qui serait combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Exemple 17.
Écrire en langage mathématiques le théorème ci-dessus.

Proposition 9.
Si $F = \mathcal{V}ect(u_1, u_2, ..., u_n)$ et $G = \mathcal{V}ect(v_1, v_2, ..., v_p)$, alors $F+G = \mathcal{V}ect(u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_p)$

Exemple 18.
Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de l'espace vectoriel E. Que vaut $\mathcal{V}ect(u_1, u_2) + \mathcal{V}ect(u_3)$?

6.2 Familles libres

Définition 8.
Soient $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que cette famille est **libre** ou que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont **linéairement indépendants**, si et seulement si une combinaison linéaire nulle de cette famille de vecteurs a nécessairement tous ses coefficients nuls. Autrement dit :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Exemple 19.

1. Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $((1, 2, 0), (0, 1, 2))$ est libre.
2. Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, montrer que la famille $1, X, X - 1$ n'est pas libre.

Remarque 10.
Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

6.3 Familles liées

Définition 9.
Soient $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que cette famille est **liée** ou que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont **linéairement dépendants**, si et seulement si elle n'est pas libre. Autrement dit : $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que pourtant $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$

Cas particuliers

1. Dans le cas où $n = 1$ alors (u_1) est liée si $u_1 = 0$.
2. Dans le cas où $n = 2$ alors (u_1, u_2) est liée si et seulement si u_1 et u_2 sont colinéaires.
3. Dans le cas où $n = 3$ alors (u_1, u_2, u_3) est liée si et seulement si u_1, u_2 et u_3 sont coplanaires.

Théorème 8.
Une famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs composant cette famille est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

6.4 Bases

Définition 10.
Une famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est une base de E si et seulement si cette famille est à la fois génératrice de E et libre.

Définition 11.

1. On appelle **base canonique** de $\mathbb{R}^2$ est la base $e_1 = (0, 1) \quad e_2 = (1, 0)$ et plus généralement dans $\mathbb{R}^n$ la base $e_i = (0...1...0)$ avec $i \in \mathbb{N}$ coordonnées toutes nulles sauf en ième position.
2. Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, la **base canonique** est $1, X, X^2$.

Théorème 9.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E, et u un vecteur quelconque de E. Il existe une unique famille $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que : $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

Les coefficients $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Ils sont uniques.

Cas particuliers
Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Dans le cas où $n = 1$ alors E est une droite vectorielle.
2. Dans le cas où $n = 2$ alors E est un plan vectoriel.

7 Espace vectoriel en dimension finie

7.1 Définitions et propriétés

Définition 12.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. E est de dimension finie si et seulement si E admet une base finie.

Théorème 10. Théorème de la dimension
Dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E non nul de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal, c'est à dire le même nombre d'éléments.

Ce nombre commun d'éléments est appelé dimension de E, on le note $\dim E$.

On convient que $\{0_E\}$ est de dimension nulle.

Exemple 20.
Les espaces vectoriels suivants sont-ils de dimension finie ou infinie ? Donner sa dimension s'il est de dimension finie.

1. $\mathbb{R}^2$.
2. Un plan vectoriel.
3. L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle.

Proposition 10. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n.

Remarque 11. La dimension d'un espace vectoriel dépend du corps $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille.

Théorème 11. Base adaptée à une somme directe
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.
On donne une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p)$ de F et $\mathcal{B}' = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G. Alors :

1. $F \cap G = \{0\} \Leftrightarrow$ la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre dans E.
2. $F + G = E \Leftrightarrow$ la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est génératrice dans E.
3. $F \oplus G = E \Leftrightarrow$ la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base dans E.

Exemple 21.
Démontrer le théorème ci-dessus.

Théorème 12. Théorème de la base incomplète
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E est une sous-famille d'une base de E.

Cela signifie qu'on peut rajouter petit à petit des vecteurs à une famille libre, convenablement choisi, afin de construire une base de E.

7.2 Dimension et cardinal des familles

Théorème 13.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $p \leqslant n$.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $p \geqslant n$.
3. Si $\mathcal{F}$ est libre ou génératrice et si $p = n$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exemple 22. Justifier le théorème précédent.

Corollaire 1.
Soit F et G deux sous espaces espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$ et dim F=dim$G$ alors $F = G$

Exemple 23.
Justifier le corollaire précédent.

8 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

8.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Les notions de famille libre et génératrice sont les mêmes que l'on se place dans E ou dans F sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

Théorème 14.
Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et on a : $\dim F \leqslant \dim E$

Théorème 15 (Formule de Grassmann).
Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Exemple 24.
Vérifier la formule sur les exemples suivants.

8.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le rang d'une famille de vecteurs de E est la dimension de sous-espace engendré par cette famille.
On le note rg.

On a donc : $\text{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \dim \mathcal{V}ect(u_1, \ldots, u_n)$

Exemple 25.
Soit $u = (2, 3, 5), v = (4, 6, 10)$, et $w = (-2, -3, -5)$. Déterminer $\text{rg}(u, v, w)$.

Théorème 16.
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

1. Si $\dim E = n$ alors on a : $\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant n$
2. $\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant p$
3. $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre si et seulement si son rang est p.

8.3 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Théorème 17.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Alors :

$$\dim F + \dim G = \dim E$$

Remarque 12.
Attention, la réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : $F = Vect((1, 1))$ et $F = G$.

Théorème 18. Théorème de caractérisation
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Si $\dim F + \dim G = \dim E$ et si $F \cap G = \{0\}$ alors F et G sont supplémentaires dans E.
2. Si $\dim F + \dim G = \dim E$ et si $F + G = E$ alors F et G sont supplémentaires dans E.

Exercices

TD 1, TD 2 et TD3

Exercice 1.

1. Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit sur E l'addition par $(a, b) \oplus (c, d) = (ac, b + d)$ et la loi externe par $\lambda \odot (a, b) = \left(a^\lambda, \lambda b\right)$. Montrer que $(E, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit les lois suivantes $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \odot (a, b) = (\lambda a, 0)$. Montrer que E muni de ces deux lois n'est pas un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
3. L'ensemble des fonction réelles bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la loi interne $\circ$ et de la multiplication par un scalaire est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.
Montrer que l'ensemble des fonctions continues muni des lois classiques $+$ et $\cdot$ sur un intervalle I$\subset \mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.
Soit $E = \mathbb{R}^3$. Les sous ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1. Ensemble des triplets $(x; y; z)$ tels que $x + y = 0$.
2. Ensemble des triplets $(x; y; z)$ tels que $x = 0$ ou $y = 0$.
3. Ensemble des triplets $(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

Exercice 4.
On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel usuelles. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1. Ensemble des polynômes du second degré.
2. Ensemble des fonctions f telles que $f(1) = 2f(0)$.
3. Ensemble des fonctions f telles que $f(1) - f(0) = 1$.
4. Ensemble des fonctions f telles que, $a \in \mathbb{R}$ étant fixé, $f(x) = f(a - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. L'ensemble des fonctions dérivables sur un intervalle I.
6. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre.
7. L'ensemble des polynômes de degrés inférieurs ou égal à n.

Exercice 5.
Indiquer sans calculs la nature des ensembles suivant :

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 2y = 0\}$.
2. $E_2 = \{(3\lambda, -\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0 \text{ ou } y + z = 0\}$
6. $E_6 = \{(3\lambda, -\lambda, 2\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exercice 6. (Facultatif)
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

TD 4-5

Exercice 7.
Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Que peut on dire de $a \in E$ si $F \cap G = \{a\}$.
2. Que peut on dire de F et G si $F \cup G = E$.

Exercice 8.
Soit $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ et
$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions continues.
2. Déterminer $F \cap G$ et vérifier que $F \cap G$ est un espace vectoriel.
3. Déterminer $F \cup G$. $F \cup G$ est il un espace vectoriel ?
4. Mêmes questions avec $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ et
$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$

Exercice 9.
L'ensemble des triplets $(x; y; z)$ tels que $x = 0$ et $2x + y = 0$ est-il un sous-espaces vectoriels de E ?

Exercice 10.
Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = z\}$. On admet que P et D sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $P \cap D$.
2. Soit $\vec{k}$ un vecteur directeur unitaire de D et soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Vérifier que $\vec{u} - (\vec{k}.\vec{u}).\vec{k}$ est dans P
   (b) En déduire que P et D sont supplémentaires.

Exercice 11.
Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.On considère les ensembles :
$P = \{f \in E / f$ est une fonction paire $\}$ et $I = \{f \in E / f$ est une fonction impaire $\}$

1. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Donner la décomposition dans $P \oplus I$ des fonctions suivantes : $x \mapsto e^x$; $x \mapsto (1 + x)^6$; $x \mapsto \sin(x)$.

Exercice 12.
Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Que peut on dire de F et G si $\forall x \in E,\ \exists (a, b) \in F \times G \mid x = a + b$.
2. Que peut on dire de F et G si $\exists x \in E \mid \exists! (a, b) \in F \times G \mid x = a + b$

TD6

Exercice 13.
Soient u et v deux vecteurs d'un espace vectoriel E, comparer les ensembles suivants :
$A = \mathcal{V}ect(u, v)$ $B = \mathcal{V}ect(-u, v)$ $C = \mathcal{V}ect(u + 2v, v)$ $D = \mathcal{V}ect(u)$ $E = \mathcal{V}ect(u) + \mathcal{V}ect(v)$

Exercice 14.
Soient u, v deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Posons $w = u - 2v$. (u, v, w) est elle libre ?
2. On suppose que u et v sont des vecteurs non colinéaires. La famille (u, v) est elle libre ?
3. On suppose que u, v et w ne sont pas colinéaires deux à deux. La famille (u, v, w) est elle libre ?

Exercice 15.
Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E

1. Soit $u = 2(e_3 - e_1) + 5e_2$, déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Considérons $u(2, -3, 1)$, $v(1, 2, 3)$ $w(-1, -9, -8)$. La famille des vecteurs $(u,\ v,\ w)$ est elle libre ?
3. Même question avec $(u(1, -1, 1)$, $v(2, 1, 3)$,$w(-1, 2, 4))$.

Exercice 16.
$\forall u \in \mathbb{R}^2$, montrer que u est combinaison linéaire de $(1, 1)$ et $(3, 1)$.

Exercice 17.
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les triplets : $a = (-1; 2; 1)$, $b = (0; 1; -1)$, $u = (1; 0; -3)$
et $v = (-2; 5; 1)$.

1. Déterminer x pour que $(x; 1; 2)$ soit élément de $\mathcal{V}ect\ (a, b)$.
2. Montrer que $\mathcal{V}ect\ (a, b) = \mathcal{V}ect\ (u, v)$.

TD7-9

Exercice 18.
Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $F = \mathrm{vect}(\mathcal{F})$.

1. $\mathcal{F}$ est-elle une base de F ?
2. Quelle condition nécessaire et suffisante doit-on avoir sur $\mathcal{F}$ pour que $\mathcal{F}$ soit une base de F ?

Exercice 19.
Les familles suivantes sont-elles génératrices de E ?
- (1,1), (3,1) et $E = \mathbb{R}^2$
- (1,0,2), (1,2,1) et $E = \mathbb{R}^3$

Les familles suivantes sont-elles libres ?
- (1,1),(1,2) dans $\mathbb{R}^2$
- (2, 3),(-6,9) dans $\mathbb{R}^2$
- (1,3,1) , (1,3,0), (0,3,1) dans $\mathbb{R}^3$
- (1,3), (-1,-2), (0,1) dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 20.
Soit (u, v, w) une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Parmi les familles suivantes, reconnaître les familles libres, les familles génératrices, les bases de E.

1. $(u, u-2v+w, -v+w)$
2. $(u-v, v-w, w-u)$
3. $(u, u-2v+w)$

Exercice 21.

1. Donner dans $\mathbb{R}^3$ un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
2. Donner dans $\mathbb{R}^3$ un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 22.
Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathcal{V}ect\,((0;4),(-1;2),(-1;-2))$.
La décomposition d'un élément de $\mathbb{R}^2$ est-elle unique ?

Exercice 23.
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u = (1, -2, 4, 1)$ et $v = (1, 0, 0, 2)$.

1. Déterminer $\mathcal{V}ect\,(u, v)$.
2. Compléter le système (u, v) en y adjoignant deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de façon à obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 24.
Les espaces vectoriels suivants sont-ils de dimension finie ou infinie ? Donner la dimension des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 3y = 0$.
2. Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.
3. Les polynômes de degrés inférieurs ou égal à n.
4. L'ensemble des polynômes.

Exercice 25.

1. Déterminer la dimension de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Exercice 26.
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Dans chaque cas ci-dessous, déterminer une base et un supplémentaire du sous-espace vectoriel F tel que :

1. $F = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 1, 1)$.
2. $F = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où $\overrightarrow{u} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v} = (2, 0, 1)$ et $\overrightarrow{w} = (1, 1, 1)$.
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\}$

Exercice 27.
Soit F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par : $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\right\}$ et $G = \{(\lambda, \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 28.
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (2,1,3,4)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (2,2,3,0)$ et $v_4 = (2,-1,3,7)$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par : $(\, v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\,)$.

1. Montrer que $(\, v_1,\ v_2,\ v_3\,)$ est une base de E et donner les coordonnées de v_4 dans cette base.
2. Déterminer un vecteur v_5 tel que $(\, v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_5\,)$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.
3. En déduire un supplémentaire F de E dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 29.
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{v} = (0,1,-1,0)$, $\overrightarrow{w} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{x} = (0,0,1,0)$ et $\overrightarrow{y} = (1,1,0,-1)$. Soient $F = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et $G = Vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

Quelles sont les dimensions de $F, G, F+G, F \cap G$?

Exercice 30.
Déterminer le rang de la famille suivante :

Dans $\mathbb{R}^4$, $F = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\,)$ avec $v_1 = (0,1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1,1)$, $v_3 = (1,1,0,1)$ et $v_4 = (1,1,1,0)$

Exercice 31.
Déterminer suivant la valeur de x, le rang de la famille suivante :
$x_1 = (1,x,-1)\,, x_2 = (x,1,x)\,, x_3 = (-1,x,1)$