Ex 8 :

i) $T_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} , a, b, c \text{ réels} \right\}$

- $O_2 \in T_2(\mathbb{R})$ car $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A \in T_2(\mathbb{R})$ $\exists a, b, c$ réels / $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

  $B \in T_2(\mathbb{R})$ $\exists d, e, f$ — / $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$

  $\alpha \in \mathbb{R}$

  $$\alpha . A + B = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

  $$= \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha a + d & \alpha b + e \\ 0 & \alpha c + f \end{pmatrix}}_{\text{c'est toujours 1 element de } T_2(\mathbb{R})}$$

  donc $T_2(\mathbb{R})$ est 1 sev de $M_2(\mathbb{R})$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} , b, c \text{ réels} \right\}$ est-il un sev de $M_2(\mathbb{R})$ ?

Ex 9 :

$\mathcal{D} = \text{Vect}\, u \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; v = \lambda u$

$\Rightarrow (x, y, z) = (2\lambda, -\lambda, 3\lambda)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -y \\ z/3 = -y \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z + 3y = 0 \end{cases}}_{\text{cette droite vectorielle est vue comme l'intersection de 2 plans.}}$$

Exemple 10 : E e.v

2) F sev de E

G sev de E

i) • $0_E \in F$ car F sev de E

• $0_E \in G$ — G ——

donc $0_E \in F \cap G$

ii) Soient $u \in F \cap G$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$

$v \in F \cap G$

u et v sont 2 vecteurs de F
or F est un sev de E

donc $\alpha u + v \in F$

De m̄ $u \in G$
$v \in G$
Or G sev de E

donc $\alpha u + v \in G$

$\alpha u + v \in F \cap G$

nous avons donc

i) $0_E \in F \cap G$

ii) $\forall u \in F \cap G$
$\forall v \in F \cap G$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\alpha u + v \in F \cap G$

donc $F \cap G$ est 1 sev de E

Ex 10 :

3) $F = \{ (x,0) , x \in \mathbb{R} \}$

$F = Vect((1,0))$

$F$ sev de $\mathbb{R}^2$

$G = \{ (0,y) , y \in \mathbb{R} \}$

$G = vect((0,1))$

$G$ sev de $\mathbb{R}^2$

$(1,0) \in F \cup G$ car $(1,0) \in F$

$(0,1) \in G \cup F$ car $(0,1) \in G$

or $(1,0) + (0,1) = (1,1)$

mais $(1,1) \notin F \cup G$

Ex 11 :

$D = Vect(u)$, $u \neq 0_E$

$D' = Vect(u')$, $u' \neq 0_E$

• $u$ et $u'$ sont colinéaires

alors $D = D' = vect(u)$

$D + D' = \{ v = \alpha u + \beta u, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \}$

$= vect(u)$

$D + D' = D = D'$

• Si $u$ et $u'$ ne sont pas colinéaires

$D + D' = \{ v \in E / v = \underbrace{\alpha u}_{\in D} + \underbrace{\beta u'}_{\in D'} , \alpha, \beta \text{ réels} \}$

$= Vect(u, u')$

Ex 10 :

Montrons que $F+G$ est un sev de F.

i) $\underline{0_E \in F+G}$ car $0_E = 0_E + 0_E$

ii) soit $u \in F+G \Rightarrow \exists f_1 \in F \quad g_1 \in G \ / \ u = f_1 + g_1$

soit $v \in F+G \Rightarrow \exists f_2 \in F \quad g_2 \in G \ / \ v = f_2 + g_2$

alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha u + v = \alpha(f_1 + g_1) + f_2 + g_2$$
$$= \underbrace{(\alpha f_1 + f_2)}_{\substack{\in F \\ \text{car } F \text{ sev}}} + \underbrace{(\alpha g_1 + g_2)}_{\in G \text{ car } G \text{ sev}}$$

donc $\underline{\alpha u + v \in F+G}$

ainsi $\underline{\underline{F+G \text{ sev de } E}}$

Ex : $F+G$ directe $\iff F \cap G = \{0_E\}$

- Supposons $F+G$ directe

  - $0_E \in F$ car $F$ sev de $E$
    $0_E \in G$ car $G$ sev de $E$ ) donc $0_E \in F\cap G$
    $\Rightarrow \boxed{\{0_E\} \subset F \cap G}$

  - Soit $w \in F \cap G \Rightarrow w \in F$ et $w \in G$

    donc
    $$w = \underbrace{w}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in G} + \underbrace{w}_{\in F}$$

    d'où par l'unicité d'écriture $w = 0_E$

    ainsi $\boxed{F \cap G \subset \{0_E\}}$

  par double inclusion nous obtenons $F \cap G = \{0_E\}$

- Réciproquement supposons que $F \cap G = \{0_E\}$

  soit $w \in F+G$ supposons que $w$ puisse s'écrire de 2 manières différentes :
  $\exists f_1 \in F \quad \exists g_1 \in G \quad / \quad w = f_1 + g_1$
  $\exists f_2 \in F \quad \exists g_2 \in G \quad / \quad w = f_2 + g_2$

  $$\Rightarrow f_1 + g_1 = f_2 + g_2$$
  $$\Rightarrow f_1 - f_2 = g_2 - g_1$$

  Or $f_1 - f_2 \in F$ car $F$ sev
  et $f_1 - f_2 \in G$ car $g_2 - g_1 = f_1 - f_2$ et $G$ sev
  donc $f_1 - f_2 \in F \cap G \Rightarrow f_1 - f_2 = 0_E$
  $\Rightarrow f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$
  d'où tout élément de $F+G$ se décompose de façon unique

Ex 15 :

- F est 1 s.e.v de E car

  - $(0,0,0) \in F$

  - soit $u = (x, y, z)$ un element de F $\Rightarrow x - y + z = 0$

    soit $v = (x', y', z')$ ______ de F $\Rightarrow x' - y' + z' = 0$

    Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

    alors $\alpha u + v = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$

    or $(\alpha x + x') - (\alpha y + y') + (\alpha z + z')$

    $= \alpha x + x' - \alpha y - y' + \alpha z + z'$

    $= \alpha (x - y + z) + (x' - y' + z')$

    $= \alpha \times 0 + 0$

    $= 0$

    $\Rightarrow \alpha u + v \in F$

- G est un sev de E car

  $G = \text{Vect}((1,1,1))$

- $F \cap G = \{0_E\}$

$\{0_E\} \in F \cap G$ (tjs vrai)

Soit $v \in F \cap G \Rightarrow v = (x, x, x)$ car $v \in G$

et $x - x + x = 0$ car $v \in F$ donc $v = (0,0,0)$

ainsi $F \cap G \subset \{0_E\}$

d'où $F \cap G = \{0_E\}$

La somme de F et G est DIRECTE

Montrons que $F+G=E$

→ On a vu, $F+G \subseteq E$

→ montrons donc que $E \subseteq F+G$

$(a,b,c) \in E$

on cherche $\lambda$, $(x,y,z)$ et $\mu$ /

$$(a,b,c) = \lambda(x,y,z) + \mu(1,1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \lambda x + \mu \\ b = \lambda y + \mu \\ c = \lambda z + \mu \end{cases}$$

or $x - y + z = 0$

$$\Rightarrow (a-\mu) - (b-\mu) + (c-\mu) = 0$$

$$\Rightarrow a - \mu - b + \cancel{\mu} + c - \cancel{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\mu = a-b+c}$$

d'où $F+G=E$.