$\boxed{\Rightarrow}$ Si $F \cap G = \{0_E\}$

montrons que $(f_1, f_2, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$ est libre

soient $a_1, \dots a_p, b_1, \dots b_q$ des scalaires /

$$a_1 f_1 + \dots + a_p f_p + b_1 g_1 + \dots b_q g_q = 0_E \quad (*)$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 f_1 + \dots + a_p f_p}_{\text{c'est 1 vecteur de F en tant que combinaison linéaire de vecteurs de F}} = \underbrace{-b_1 g_1 - \dots - b_q g_q}_{\text{par egalité c'est, aussi 1 vecteur de G}}$$

$\Rightarrow a_1 f_1 + \dots + a_p f_p \in F \cap G$

$\Rightarrow a_1 f_1 + \dots + a_p f_p = 0_E$

$\Rightarrow a_1 = \dots a_p = 0$ ĉ $(f_1, \dots f_p)$ base de F c'est 1 famille libre

donc

en remontant, dans $(*)$

$$b_1 g_1 + \dots b_q g_q = 0_E$$

$\Rightarrow \forall i \; b_i = 0$ car $(g_1, \dots g_q)$ base de G donc c'est 1 famille libre

Au Bilan $a_1 = \dots a_p = b_1 = \dots b_q = 0$

$\Rightarrow$ la famille $(f_1, f_2, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$ est libre

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement

Supposons que $(f_1, f_2, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$ soit libre

. nous avons toujours $\{0_E\} \subset F \cap G$

car $F \cap G$ est 1 sev

. maintenant soit $x \in F \cap G$

$x \in F$ or $(f_1, \dots f_p)$ base de F

donc $\exists! (a_1, \dots a_p)$ réels /

$$x = a_1 f_1 + \dots + a_p f_p$$

$x \in G$ or $(g_1, \dots g_q)$ base de G

donc $\exists! (b_1, \dots b_q)$ réels /

$$x = b_1 g_1 + \dots + b_q g_q$$

alors

$$x = a_1 f_1 + \dots a_p f_p = b_1 g_1 + \dots b_q g_q$$

$$\Rightarrow a_1 f_1 + \dots + a_p f_p - b_1 g_1 - \dots b_q g_q = 0_E$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots a_p = -b_1 = \dots -b_q = 0$$

par liberté de la famille $(f_1, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$

$\Rightarrow x = 0_E$ $F \cap G \subset \{0_E\}$

d'la ĉ $\{0_E\} \subset F \cap G$

$$\Rightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

$\Rightarrow$ Si $F+G=E$

$\underline{\underline{\forall x \in E}}$ $\exists f \in F$, $\exists g \in G$ /

$$x = f+g$$

or $f \in F$ et $(f_1, \dots f_p)$ base de F

donc $\exists!$ $(a_1, \dots a_p)$ des réels /

$$f = a_1 f_1 + \dots a_p f_p$$

or $g \in G$ et $(g_1, \dots g_q)$ base de G

donc $\exists!$ $(b_1, \dots b_q)$ des réels /

$$g = b_1 g_1 + \dots b_q g_q$$

ainsi

$$\boxed{x = a_1 f_1 + \dots + a_p f_p + b_1 g_1 + \dots b_q g_q}$$

$\Rightarrow$ $(f_1, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$ génère E,

est 1 famille génératrice de E.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $(f_1, f_2, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$ génère E

alors

$\forall x \in E$ il existe des scalaires $(a_1, \dots a_p, b_1, \dots b_q)$

tels que

$$x = \underbrace{a_1 f_1 + \dots + a_p f_p}_{} + \underbrace{b_1 g_1 + \dots b_q g_q}_{}$$

$$x = f + g$$

avec $f = a_1 f_1 + \dots + a_p f_p \quad f \in F$

$g = b_1 g_1 + \dots b_q g_q \quad g \in G$

$\Rightarrow E \subset F + G$

et $F + G \subset E$) $E = F + G$

Ex 26 :

$v = 2u$

$w = -u$

$$\begin{aligned} rg(u, v, w) &= \dim \operatorname{Vect}(u, v, w) \\ &= \dim \operatorname{Vect}(u, -u, 2u) \\ &= \dim \operatorname{Vect}(u) \\ &= 1. \end{aligned}$$