MATRICES ET CALCUL MATRICIEL : applications aux matrices deux-deux

Objectifs
- **Savoir ce qu'est une matrice.**
- **Savoir additionner et multiplier deux matrices.**
- **Savoir calculer un déterminant et l'inverse d'une matrice deux-deux.**

Dans tout le chapitre on désignera par $\mathbb{K}$ les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Les matrices

1.1 définitions

Définition 1 (Notation)**.**
On appelle matrice à n lignes et p colonnes, un tableau de np nombres qui appartiennent à $\mathbb{K}$. On note alors :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

sous forme étendue ou compressée.
Les a_{ij} sont donc des réels ou des complexes, i représente la ligne et j la colonne du nombre a_{ij}.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans l'ensemble $\mathbb{K}$

Lorsque $p = 1$ on dit que l'on a une matrice colonne : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vidéo : *un exemple*

Exemple 1.
Chacune des matrices suivantes appartiennent à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Déterminer n, p et $\mathbb{K}$ pour chacune des matrices suivantes :

1. $B = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & \sqrt{2} \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
2. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 L'addition des matrices

L'addition entre deux matrices est une opération très naturelle. Elle est notée + tout simplement et on a la définition suivante :

Définition 2.
Soit A et B deux matrices appartenant **au même ensemble** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors si l'on a :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

et bien

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 1.
Vous voyez que la définition est précise. L'addition de deux matrices n'est possible qu'à condition que les deux matrices appartiennent toutes deux au même ensemble. Sinon, la somme n'existe pas !

Exemple 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Justifier que la somme des deux matrices est possible et calculer $A + B$.

Vidéo : *correction*

Propriété 1.
Soit A, B et C trois matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i)

$$A + B = B + A$$

La somme des matrices est commutative.

(ii)

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

La somme des matrices est associative.

(iii) Il existe un élément neutre pour l'addition des matrices. Cette matrice est appelé matrice nulle notée O et on a tout simplement :

$$O = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède une matrice symétrique notée $-A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$A + (-A) = O$$

D'ailleurs pas abus de notation on note aussi $A - A = O$. On a :

$$-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Ces 4 propriétés font de $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+\right)$ un groupe commutatif.

1.2.2 Multiplication d'une matrice et d'un scalaire

On peut multiplier une matrice par un scalaire α c'est à dire un élément de l'ensemble $\mathbb{K}$.

Définition 3.
Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$; alors on a :

$$\alpha \cdot A = \alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1p} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Exemple 3.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et soit $\alpha = 7$.
Calculer $7A$.
Vidéo : *correction*

Remarque 2.
Le scalaire s'écrit toujours à gauche de la matrice. Ainsi on écrit $7A$ mais surtout pas $A7$! De même on écrit $\frac{1}{7}A$ mais surtout pas $\frac{A}{7}$!

Propriété 2. Quelques propriétés sur la loi $\cdot$

(i)
$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2, \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

(ii)
$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

(iii)
$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

(iv) 1 est l'élément neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire, que ce soit si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1.2.3 Multiplication des matrices

La multiplication des matrices n'est pas une loi très naturelle.

Définition 4.
Soit une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant \mathbf{p}}} \in \mathcal{M}_{n,\mathbf{p}}(\mathbb{K})$ et soit une autre matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant \mathbf{p}\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p},q}(\mathbb{K})$.

Alors le produit de A par B est possible, on a

$$A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

et :

$$A \times B = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$$

avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Vidéo : *Multiplication de 2 matrices*

Exemple 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Calculer AB et BA.

Remarque 3. TRÈS IMPORTANT !

1. Le nombre de colonnes de la première matrice dans la multiplication doit être égal au nombre de ligne de la deuxième matrice. Sinon, le calcul de $A \times B$ est impossible.
2. La matrice résultat du produit de deux matrices, possède le nombre de lignes de la première matrice et le nombre de colonnes de la deuxième.
3. On peut écrire AB au lieu de $A \times B$

Propriété 3.

1. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,n}$ telles que $AB \neq BA$.
2. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,n}$, A et B non nulles, telles que $AB = 0$

Dis autrement, en général, $AB \neq BA$ (On dit que le produit de matrices est non commutatif) et $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Propriété 4. Quelques propriétés

(i)

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C$$

On dit que le produit matriciel est associatif.

(ii)

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (B_1, B_2) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^2, A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

On dit que le produit matriciel est distributif par rapport à la somme matricielle.

(iii)

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha A) B = \alpha (AB)$$

2 Les matrices deux-deux

2.1 Liens entre matrices et systèmes

$$\begin{cases} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \Leftrightarrow MX = Y$$

avec $M = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$

Vidéo : *explication 2.1*

Exemple 5. Déterminer le système ou la matrice correspondant :

1. $\begin{cases} 2x + 4y & = & 5 \\ x - y & = & 3 \end{cases}$
2. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

2.2 Inverse d'une matrice deux-deux

Définition 5. Soit M une matrice deux deux, M est inversible signifie qu'il existe une matrice N telle que

$$MN = NM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notation : la matrice inverse de M est notée M^{-1} et la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ appelée identité, est notée I_2.

Exemple 6.
Soit M et N les matrices définies par :

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Calculer MN et NM.
2. Que peut on en déduire ?

Définition 6.
Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$, le déterminant de M, noté $\det M$, est égal à

$$\det M = ab' - ba'$$

Propriété 5.
M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$

Exemple 7.
La matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ est elle inversible ?

Propriété 6.
Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ une matrice inversible, alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{bmatrix}$$

Exemple 8.
Calculer l'inverse de M ci-dessus

2.3 Utilisation de la matrice inverse pour résoudre un système

Considérons le système
$$\begin{cases} ax+by &= c \\ a'x+b'y &= c' \end{cases}$$
Soient (x,y) la solution du système et M la matrice associée, si M est inversible alors

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

Vidéo : *Résolution d'un sustème avec des matrices*

Exemple 9.
Résoudre le système suivant à l'aide de matrices : $\begin{cases} 2x+y &= 1 \\ x+3y &= 1 \end{cases}$

Exercices TD

Exercice 1.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 2.
Calculer AB et BA avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ Déterminer a pour que la matrice A soit inversible. Calculer alors A^{-1}.

Exercice 4.
Déterminer deux matrices A et B pour lesquelles $AB = BA$.

Exercice 5.
Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel :

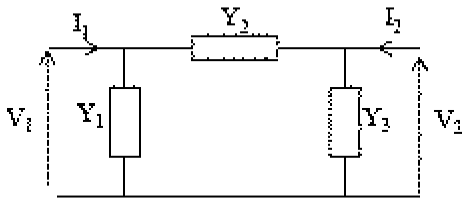
1. $\begin{cases} x+z=1 \\ -x-z=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} ax+y=b \\ x+2y=1 \end{cases}$

Exercice 6.
Deux élèves ont pris des cours de tennis. L'une a pris 16h de leçons et a effectué trois stages : elle a payé 558 euros, l'autre a pris 18h de leçons a effectué deux stages et a payé 460 euros. Traduire l'énoncé ci-dessus sous forme de système, puis sous forme matriciel.

En déduire le prix d'une leçon et d'un stage.

Exercice 7.

Considérons le circuit suivant :



On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{I_1} = (\underline{Y_1} + \underline{Y_2})\underline{V_1} - \underline{Y_2}\,\underline{V_2} \\ \underline{I_2} = -\underline{Y_2}\,\underline{V_1} + (\underline{Y_3} + \underline{Y_2})\underline{V_2} \end{cases}$$

Traduire ce système sous forme matricielle puis en déduire le vecteur $\begin{bmatrix} \underline{V_1} \\ \underline{V_2} \end{bmatrix}$ en fonction de $\begin{bmatrix} \underline{I_1} \\ \underline{I_2} \end{bmatrix}$.

Exercice 8.

Soit A et B deux matrices deux-deux. Montrer que $\det AB = \det A \times \det B$.

Exercice 9.

Soit A, B et C trois matrices carrées, et B une matrice inversible telles que : $A = BCB^{-1}$.

Exprimer C en fonction de A et B.

Exercice 10.

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$
2. Calculer J^2
3. Calculer A^2, A^3 et A^4 comme combinaison linéaire des matrices I et J.