CHAPITRE 0 : Révisions de Première année.

Le but de ce "Chapitre 0" est de préparer au module M3.1 en présentant notamment les outils de première année importants à revoir et comprendre pour pouvoir le suivre au mieux. Il commence par un aperçu rapide de chacun des chapitres, puis chaque section propose des exercices et des rappels de cours importants permettant de préparer chacun des chapitres du semestre.

1 Aperçu du module M31 - Présentation des différents chapitres.

Le but de ce module est de généraliser des outils d'analyse aperçus en 1e année (suites, intégrales, limites) en les prolongeant à un contexte plus général, ce qui permettra d'introduire des outils très importants pour les autres matières (intégrales sur un domaine non borné, séries, séries de Fourier, Transformée de Laplace).
Voici une courte description des différents chapitres ainsi que des différents outils mathématiques nécéssaires à la compréhension de celui-ci.

1.1 Intégrales Généralisées.

Dans ce chapitre, on prolonge la notion d'intégrale vue en 1e année (intégrale d'une fonction continue sur un segment) en donnant une définition de convergence pour les intégrales sur un ouvert.
On comprendra par exemple quel sens on peut donner à

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-3t}dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Outils utilisés : Techniques d'intégrations et de calcul de primitives usuels ; Etude du comportement d'une fonction au voisinage d'un point et comporaison de fonctions : limite, équivalent, développement limité ou asymptotique, majoration de fonctions ; Décomposition en éléments simples.

1.2 Séries Numériques.

Cette nouvelle notion de l'année est l'équivalent discret des intégrales généralisées et prolonge la notion de suites. On étudie un cas particulier de suites de la forme $S_N = \sum_{n=1} N u_n$ où (u_n) est une suite réelle et on regarde l'existence ou non de la limite de ces objets.
On apprendra par exemple que les séries

$$S_1 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}, \quad S_3 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

convergent et que l'on peut donc parler de

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

mais que par exemple $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ ne converge pas et donc qu'on ne peut pas parler de la somme entre 1 et $+\infty$ dans ce cas.
Outils utilisés : Généralités sur les suites : suites géométriques, limite monotone, limites de suites, suites adjacentes ; Comparaisons de suites et comportement en $+\infty$: majorations, développements limités, équivalents ; Calcul usuels de sommes (géométriques, téléscopiques, décomposition en éléments simples).

1.3 Suites et séries de fonctions.

Ce court chapitre fait la liaison entre le chapitre sur les séries et les chapitres qui suivent sur les séries de fonctions (séries entières, séries de Fourier).
Outils utilisés : Etudes de fonctions : majorations, borne supérieure ; manipulation des quantificateurs.

1.4 Séries Entières.

Dans ce chapitre, on introduit la notion de Série Entière, et de fonctions développables en séries entières. C'est à la fois une généralisation des Séries (Chapitre 2), mais également de la notion de développement limité vue en 1ere année. En particulier, cela nous donnera des outils pour trouver des solutions d'équations différentielles.
On aura des conditions sur x pour que les séries suivantes aient du sens

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et on verra que certaines fonctions peuvent s'écrire sous cette forme : pour certains x, on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Outils utilisés : Développements limités ; Comparaisons de fonctions ; Suites géométriques ; Manipulations sur les sommes de suites ; Equations Différentielles.

1.5 Séries de Fourier.

Dans ce chapitre, on étudie un outil extrêmement important en physique (traitement du signal, mécanique, etc) : les séries de Fourier. On décompose un signal périodique comme une somme infinie d'harmoniques, c'est-à-dire de fonctions de type $a_n \cos(nft) + b_n \sin(nft)$. On verra comment trouver les coefficients d'une fonction à l'aide d'intégrales, et sous quelle condition une fonction est égale à sa transformée de Fourier. On aura des égalités de la forme :

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Outils utilisés : Calculs d'intégrales (I.P.P notamment), études de fonction (parité, périodicité, continuité), manipulations de sommes de suite.

1.6 Transformée de Laplace.

Dans ce dernier chapitre, on étudie pour toute une classe de fonctions la Transformée de Laplace de ces fonctions, qui est une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-p.t}dt.$$

Cette transformation est une alternative à la Transformée de Fourier, que vous avez utilisé dans le cours d'électrocinétique et permet de transformée des dérivées en multiplication par la variable ($\frac{d\hat{U}}{dt} = i\omega\hat{U}$ ou en Laplace $\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p)$) ce qui permet de simplifier les équations différentielles. En physique, cela permet d'associer à chaque système une fonction de transfert et d'étudier les propriétés du montage indépendemment du signal reçu en entrée (étude des filtres, diagramme de Bode, etc.). En maths, on utilisera cette notion pour résoudre des équations différentielles.

Outils utilisés : Décomposition en éléments simples, nombres complexes, calculs d'intégrales.

2 Comparaisons de fonctions (DL/équivalents/limites).

En première année, nous avons vu plusieurs notions permettant de comparer des fonctions (ou des suites) au voisinage d'un point (par exemple en $+\infty$). En plus des inégalités (déjà connues), on a de plus introduit les notions de fonctions négligeables et d'équivalents. Ces outils seront absolument nécessaires dans tous les chapitres étudiés ce semestre et doivent être maitrisés.

2.1 Rappels de cours.

Définition 1. Compléter les définitions suivantes : soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On supposera que g ne s'annule pas au voisinage de a :

$$f(t) = o(g(t)) \iff \frac{f(t)}{g(t)} \underset{t\to a}{\rightarrow} \dots$$

et

$$f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t) \iff f(t) = g(t)(1 + o(1)) \iff \frac{f(t)}{g(t)} \underset{t\to a}{\rightarrow} \dots$$

De même, pour deux suites (u_n) et (v_n) avec (v_n) non nulle à partir d'un certain rang :

$$u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \rightarrow \dots$$

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n(1 + o(1)) \iff \frac{u_n}{v_n} \to \ldots$$

Remarque 1. Plusieurs remarques qui découlent de ces définitions :

— Être un $o(1)$ signifie que l'on tend vers 0.

— On ne peut JAMAIS être ~ 0 (ça revient à diviser par 0, ce qui n'a aucun sens).

— Deux quantités équivalentes ont le même signe au voisinage de a.

— Pour trouver un équivalent, plusieurs méthodes : on peut soit vérifier que les quantités sont équivalentes en faisant le quotient et en regardant sa limite ; ou bien on peut écrire f comme une quantité g multipliée par une quantité qui tend vers 1 (par exemple en factorisant les termes dominants) ; ou bien on peut faire un D.L. et le premier terme non nul obtenu dans le D.L. est un équivalent.

Exemple 1.

1. Pour deux nombres $a, b > 0$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $t^a = o(t^b)$ au voisinage de $+\infty$, puis au voisinage de 0.
2. Déterminer un équivalent de $\dfrac{2+3t^3}{t^4+t^5}$ au voisinage de $+\infty$, puis au voisinage de 0.

Proposition 1 (Développements limités usuels)**.** Pour beaucoup de fonctions usuelles, on a des développements limités au voisinage de 0. Les suivants reviennent tout le temps et doivent être connus. Pour chacune de ces fonctions, écrire son développement limité à l'ordre 4 quand la quantité $u \to 0$:

— $e^u =$

— $\sin(u) =$

— $\cos(u) =$

— $\ln(1+u) =$

— $\dfrac{1}{1-u} =$

Remarque 2. On peut remplacer u par n'importe quelle quantité QUI TEND VERS 0 et on ajustera le $o()$ en conséquence. On peut les utiliser pour $e^{2t^2}, \cos(x^2), \sin(1/n)$ et même $\ln(1+\sin(t))$ quand $t, x \to 0$, mais il est par exemple extrêmement FAUX d'écrire :

$$\text{"} \cos(n) = n - n^3/6 + o(n^3)\text{"}$$

quand $n \to +\infty$ par exemple (comparez le comportement de $\cos(n)$ et de $n - n^3/6$ pour vous en convaincre).

Exemple 2.

1. Trouver un équivalent de $e^{1/n^2} - 1$ quand $n \to +\infty$.
2. Écrire le développement limité de $\sin(2t)$ quand $t \to 0$ à l'ordre 3.
3. Donner un équivalent de $\cos(x^3) - 1$ quand $x \to 0$
4. Calculer la limite de $\dfrac{\ln(1+3t)}{t}$ quand $t \to 0$.

5. Trouver un équivalent de $\dfrac{1}{1-\cos(t)}$ quand $t \to 0$.

Proposition 2 (Opérations sur les développements limités et les équivalents). Comment utiliser ces outils :

— On peut faire la plupart des opérations usuelles sur les développements limités tant que l'on fait attention aux $o()$: on peut sommer, soustraire, composer, multiplier, diviser et même primitiver des développements limités.

— En revanche, pour les équivalents, on peut faire des multiplications et des quotients d'équivalents, mais C'EST TOUT. On ne fera JAMAIS une addition ou une soustraction d'équivalents (on passera par les développements limités dans ce cas).

2.2 Exercices d'applications.

Exercice 1. 1. Calculer la limite de $\dfrac{\sin(t)}{t}$ en 0.

2. Calculer la limite de $n \ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2. 1. Donner un équivalent de $\dfrac{\sin(t)+t}{t+t^3}$ quand $t \to 0$, puis quand $t \to +\infty$.

2. Donner un équivalent en 0 de $\dfrac{\cos(t)\ln(t)}{1+t^2}$.

3. Montrer que, quand $t \to +\infty$, on a $\dfrac{\cos(t)\ln(t)}{1+t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$.

3 Intégrales sur un segment

Les intégrales sont un outil que l'on rencontrera de nouveau très fréquemment ce semestre et sont à la base des chapitres Intégrales Généralisées, Séries de Fourier et Transformées de Laplace. Il est très important d'être à l'aise sur les calculs basiques autour des intégrales. En particulier, doivent être maitrisés :

— Les calculs de primitives usuelles (t^a pour $a \in \mathbb{R}$, $e^t, \sin(t), \cos(t), \dfrac{1}{1+t^2}$...) et les manipulations autour de celles-ci.

— Les propriétés basiques des intégrales (linéarité, relation de Chasles, positivité).

— Le changement de variables.

— L'intégration par parties.

Si l'un de ces points n'est pas clair pour vous, revoyez votre cours correspondant.

Exercices d'entrainement.

Exercice 3. (Fonction arctan)

1. Rappeler la dérivée de arctan. En déduire une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{a^2+t^2}$ où $a > 0$ est un paramètre réel.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 \frac{t+1}{t^2+4}dt$.

Exercice 4. Pour $0 < \varepsilon < 1$, calculer avec une intégration par parties l'intégrale

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)dt.$$

Cette quantité a-t-elle une limite quand $\varepsilon \to 0$?

Exercice 5. Pour $A \geqslant 1$ et $0 < \varepsilon \leqslant 1$,

1. Calculer $\displaystyle\int_0^A \frac{dt}{1+t^2}$. Cette quantité a-t-elle une limite quand $A \to +\infty$?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Calculer $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha}$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur α cette quantité a une limite (finie) quand $A \to +\infty$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Calculer $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t^\alpha}$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur α cette quantité a une limite (finie) quand $\varepsilon \to 0$?

Exercice 6. Rappeler la définition d'une fonction impaire, puis montrer en utilisant les propriétés de l'intégrale (Relation de Chasles + changement de variables), que si f est impaire, alors pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt.$$

Exercice 7. Pour $n \geqslant 0$, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi \sin(nt)dt, \quad \int_0^\pi t\sin(nt)dt, \quad \int_0^\pi t^2\sin(nt)dt.$$

Exercice 8. Pour $p > 0$, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^A e^{-pt}dt, \quad \int_0^A te^{-pt}dt, \quad \int_0^A t^2e^{-pt}dt, \quad \int_0^A \cos(t)e^{-pt}dt.$$

Pour la dernière intégrale, on pourra utiliser que $\cos(t) = Re(e^{it})$*, ou bien on pourra faire 2 intégrations par parties successives.*

4 Suites réelles.

Les suites sont une notion fondamentale des années précédentes que l'on va prolonger avec l'étude des séries : ces notions sont fondamentales pour les chapitres Séries, Suites et séries de fonctions, Séries entières, Séries de Fourier.
En plus des théorèmes de convergence de suite, il faut connaître les différents outils d'études et de comparaisons de suites comme pour les fonctions (limites, majorations, développements limités, équivalents). De plus, des outils propres à la manipulation des suites et des sommes de suites sont nécessaires (sommes particulières, sommes télescopiques, ré-indexation des termes d'une somme).

Exercices d'entrainement.

Exercice 9. (Étude de limites de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$)
Pour chacune des suites (u_n) suivantes, exprimer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et calculer sa limite quand $n \to +\infty$.

$$1.\, u_n = \frac{n}{2^n}, \quad 2.\, u_n = \frac{(n-1)^2(n+1)}{n^4}, \quad 3.\, u_n = \frac{n!}{(n+1)^2}, \quad 4.\, u_n = \frac{2^n}{n!}$$

Exercice 10. (Sommes de suites géométriques)

1. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$$
en fonction de la valeur de q. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur q pour que cette suite ait une limite (finie) quand $N \to +\infty$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour quels x la suite
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 2^n x^n$$
converge-t-elle vers une limite finie quand $N \to +\infty$?

Exercice 11. (Séries alternées)

1. Rappeler la définition de "(u_n) et (v_n) sont adjacentes".
2. Pour $n \geqslant 0$, on définit les deux suites
$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \left(= u_n + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right).$$
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. On définit, pour $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$
Montrer que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 12. (Manipulation de sommes)

1. Décomposer en éléments simples la fonction $F(X) = \dfrac{1}{X^2 + X}$.
2. Calculer
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2 + n}.$$
La suite (S_N) converge-t-elle quand $N \to +\infty$? Si oui, donner sa limite.

5 Décomposition en éléments simples.

La décomposition en éléments simples des fractions rationnelles est une méthode très importante : dès que l'on aura une fraction rationnelle, on pourra la décomposer en une somme de fractions beaucoup plus simples à manipuler. On a déjà vu comme exemple d'utilisations des calculs d'intégrales et de primitives, mais également des calculs de sommes de suites en faisant apparaitre des sommes télescopiques. On réutilisera ces techniques dans les chapitres sur les intégrales généralisées et les séries, mais ce sera également l'outil principal pour calculer des transformées de Laplace inverse dans le chapitre correspondant.

5.1 Principe général.

On part d'une fraction rationnelle (irréductible et avec le numérateur de degré inférieur stricte au degré du dénominateur) avec différents pôles ou polynômes irréductibles au dénominateur, et on peut l'écrire comme une somme d'éléments simples, où chaque élément simple correspond à l'un des polynôme irréductible du dénominateur mis à une certaine puissance. On a autant d'éléments simples que de polynômes irréductibles au dénominateur de la fraction comptés avec leur multiplicité.
Les éléments simples peuvent être de deux formes en fonction de si le polynôme irréductible associé est de degré 1 ou 2 :

$$\frac{a}{(X-\alpha)^k} \text{ (irréductible de degré 1)} \quad \text{ou} \quad \frac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^k} \text{ (irréductible de degré 2)}$$

où $X^2 + \alpha X + \beta$ n'a pas de racine réelle, et les exposants k prennent toutes les valeurs inférieures à la multiplicité dans la fraction initiale. Les coefficients a, b sont des coefficients réels que l'on cherche ensuite à déterminer.
On se propose de faire étape par étape la décomposition en éléments simples de la fraction

$$F(X) = \frac{X^3 + 3}{X(X-1)^3(X^2+1)}.$$

Exemple 3. É crire la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)$.

5.2 Méthodes principales de calcul des coefficients.

Il y a plusieurs techniques différentes pour déterminer les coefficients des différents éléments simples. En pratique, en fonction de la tête de notre fraction, on utilisera plusieurs de ces techniques.

Comportement au voisinage d'un pôle réel (méthode "du masque").

Cette technique pourra être utilisée dans la plupart des cas. Elle permet d'obtenir le coefficient de l'élément simple de plus haut degré pour chaque pôle réel.
Si la fraction est irréductible de la forme $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-\alpha)^m Q_2(X)}$ avec Q_2 qui n'a pas α comme pôle (c'est-à-dire que $(X-\alpha)$ est un irréductible avec une multiplicité m), cette méthode permet d'obtenir le coefficient associé à l'élément simple de plus haut degré associé au pôle α, c'est-à-dire celui de la forme $\dfrac{a}{(X-\alpha)^m}$.
Pour obtenir le coefficient a, on multiplie la fraction par $(X-\alpha)^m$ et on évalue en la racine :

$$F(X).(X-\alpha)^m|_{X=\alpha} = a.$$

Exemple 4. Calculer tous les coefficients que l'on peut trouver par cette méthode pour la fraction $F(X)$.

Comportement au voisinage d'un pôle complexe.

Cette méthode suit le même principe que la méthode au voisinage d'un pôle réel, mais nécessite une étape supplémentaire pour obtenir les deux coefficients réels. On suppose qu'au dénominateur de F, on a un irréductible de degré 2 de multiplicité m $(X^2+aX+b)^m)$ avec pour racines complexes $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$. L'élément simple associé est de la forme $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$.
Pour trouver les coefficients c et d, on commence comme précédemment : on multiplie par $(X^2+aX+b)^m)$ et on évalue en **l'une des racines complexes conjuguées**

$$F(X).(X^2+aX+b)^m|_{X=\alpha+i\beta} = c(\alpha+i\beta)+d.$$

Attention à la partie à droite, $cX+d$ devient bien $c(\alpha+i\beta)+d$ quand on évalue en $\alpha+i\beta$ (écrire la ligne précédente à la main à chaque fois pour ne pas se tromper). On a donc $c(\alpha+i\beta)+d$ qui est égal au nombre complexe de gauche. L'étape suivante est de comparer les parties réelles et imaginaires des deux parties (et donc de transformer le membre de gauche sous forme rectangulaire on obtient quelque chose de la forme

$$x + i.y = c(\alpha+i\beta)+d = (c\alpha+d)+i.c\beta$$

donc $x = (c\alpha+d)$ et $y = c\beta$, ce qui permet de trouver c et d.

Exemple 5. Utiliser cette méthode pour trouver les coefficients de l'élément simple associé au pôle complexe dans la fraction $F(X)$.

Relations supplémentaires.

Si certains coefficients n'ont pas encore été attrapés par les méthodes précédentes, il faut chercher des relations supplémentaires pour pouvoir les obtenir.

Comportement en l'infini. Une façon simple d'avoir une relation supplémentaire est de regarder le comportement en l'infini : on sait que $F(X)$ tend vers 0, mais on va se demander comment.
On regarde donc $F(X).X$ et on fait tendre $X \to +\infty$ ce qui va nous donner une relation entre les coefficients des éléments simples (en termes mathématiques, on regarde en fait l'équivalent en $+\infty$ de F et on compare avec ce que l'on a dans la décomposition en éléments simples).

Évaluation en des réels. Une dernière méthode (un peu moins agréable à mettre en place) est d'évaluer la fraction $F(X)$ en des nombres réels qui ne sont pas des pôles de F. Chaque évaluation rajoutera une relation.

Exemple 6. Trouver des relations supplémentaires et déterminer les coefficients manquants dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$.

Si après cette étape, vous avez trouvé la décomposition en éléments simples suivante, félicitations, vous avez compris l'essentiel des techniques :

$$\frac{X^3+3}{X(X-1)^3(X^2+1)} = \frac{-3}{X} + \frac{\frac{7}{2}}{X-1} + \frac{-\frac{5}{2}}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{-\frac{1}{2}X-1}{X^2+1}.$$

5.3 Exercices d'applications.

Exercice 13. Soit $A \geqslant 1$. En utilisant des décompositions en éléments simples, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^A \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}dx$
2. $\displaystyle\int_1^A \frac{x+1}{x^3+4x}dx$

Ces intégrales ont-elles des limites quand $A \to +\infty$?

Exercice 14. Calculer les décompositions en éléments simples des fractions suivantes :

1. $F_1(X) = \dfrac{X+2}{(X^2-2X+2)(X-2)^2}$
2. $F_2(X) = \dfrac{1}{(X-1)^2X^2(X-2)}$

6 Étude de fonctions.

En plus des outils classiques déjà revus sur les fonctions classiques (limites, comparaisons...), dans le chapitre Suites et Séries de fonctions (ainsi que dans le module M4.1), on aura besoin de manipulations sur le sup de fonctions.

6.1 Rappels sur la borne supérieure.

Définition 2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble de nombres réels. On appelle **borne supérieure** de A (notée $\sup A$) le plus petit des majorants de A si A est majoré, et $+\infty$ si A n'est pas majoré. De même, la borne inférieure de A ($\inf A$) est le plus grand des minorants de A si A est minoré, et $-\infty$ sinon.

C'est une généralisation du concept de maximum et de minimum, qui n'existent pas toujours.

Exemple 7. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer (si ils existent) leur maximum, leur minimum, et donner leur bonne supérieure et borne inférieure :

1. $A_1 =]0, 1]$
2. $A_2 =]-\infty, 3]$
3. $A_3 = \mathbb{Q} \cap]2, 3[$

Dans ce module, on s'intéressera au sup de la valeur absolue d'une fonction sur un intervalle.

Définition 3. Si g est une fonction réelle et $I \subset \mathbb{R}$, on définit :

$$\sup_{t \in I} g = \sup(\{g(t); t \in I\}).$$

Remarque 3. Attention, le sup d'une fonction dépend de la fonction tout entière : $\sup_{t \in I} f(t)$ **ne peut pas dépendre de la variable** t.

Exemple 8. Déterminer les sup suivants :

$$\sup_{t \in [0,\pi]} \cos(t), \quad \sup_{t>0} e^{-t}, \quad \sup_{t>t_0} e^{-t}.$$

La propriété suivante est extrêmement importante dans la pratique.

Proposition 3. (Inégalités sur le sup). Par définition du sup, comme c'est le plus petit des majorants, on a les propriétés suivantes :

1. Si M est un majorant de f sur I, alors $\sup_{t \in I} f(t) \leqslant M$.
2. Si il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \geqslant m$, alors $\sup_{t \in I} f(t) \geqslant m$.

6.2 Exercices d'application.

Exercice 15. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction g_n sur $[0, +\infty[$ par

$$g_n(t) = \frac{t.\cos(t)}{1 + nt}.$$

1. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $|g_n| \leqslant \frac{1}{n}$. Que peut-on en déduire sur $\sup_{t \geqslant 0} |g_n(t)|$?

2. Montrer que $\sup_{t \geqslant 0} |g_n(t)|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$?

Exercice 16. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(t) = te^{-\frac{t}{n}}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $f_n(t) \underset{n \to +\infty}{\to} t$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\delta_n(t) = |f_n(t) - t| = \left| t(e^{-\frac{t}{n}} - 1) \right|$.
   — Que vaut $\delta_n(n)$? Que peut-on en déduire sur $\sup_{t \geqslant 0} \delta_n(t)$?
   — Est-ce que $\sup_{t \geqslant 0} \delta_n(t)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$?