Exercice 1

1) a) Si la limite est finie, on peut prolonger f par continuité en 0, f est alors intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$, donc $\int_0^1 f$ cv

Vrai

b) Faux, si $f(t) = \frac{1}{t^2}$, $\lim_{+\infty} t f(t) = 0$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ cv

c) Faux : si $f(t) = \frac{1}{t}$, alors $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ DV et $f(t) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

d) Faux : si $f(t) = -1$, alors $f(t) \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} f$ DV

2) a) <u>En 0 :</u> on fait le changement de variables

$X = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim_{X \to +\infty} X^3 e^{-X} = 0$ par croissance comparée

donc on prolonge par continuité f en 0 en posant $f(0) = 0$

donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ cv.

<u>En $+\infty$</u> $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} \sim \frac{1}{x^3}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ cv $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^3}\,dx$ cv

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$ cv

(b) $\dfrac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ cv

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ cv

(c) • $\lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\frac{\ln 1+x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$

et $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ cv $\Rightarrow \int_0^{1/2} f(x)\,dx$ cv

• $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{\ln 2}{\sqrt{1-x}}$ on pose $X = 1-x$

et $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{X}}\,dX$

$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ cv $\Rightarrow \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ cv donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$ cv

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ cv.

(d) En $+\infty$, $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ DV

Exercice 2

1) a) Faux : $u_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum u_n$ cv mais $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1 \nless 1$

b) Vrai : si $\sum u_n$ cv alors $u_n \longrightarrow 0$ donc $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $0 < u_n \leq 1$ $\Rightarrow u_n \geq u_n^2 > 0$

or $\sum u_n$ cv dc $\sum u_n^2$ cv

(c) Faux : $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum -\frac{1}{n}$ DV mais $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ dc cv.

2) (a) $\left|\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ cv donc $\sum u_n$ Abs. cv.
donc $\sum u_n$ cv.

(b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\ln\frac{1}{2} + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)} = \frac{1}{2^n} \times e^{n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

$\sim \frac{1}{2^n} \times e^{\frac{1}{2}}$ or $\sum \frac{1}{2^n}$ est 1 suite géom. de raison $\frac{1}{2}$

et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ dac $\sum \frac{1}{2^n}$ cv donc $\sum u_n$ cv (et aussi Abs. cv.
car $u_n \geq 0$)

(c) • $\sum (-1)^n \arctan\frac{1}{n}$ est 1 série alternée.

• $\frac{1}{n} \searrow$ et $\arctan \nearrow$ $\Rightarrow \arctan\frac{1}{n} \searrow$

• $\arctan\frac{1}{n} \longrightarrow \arctan 0 = 0$

donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum u_n$ cv.

• $\arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ DV, donc $\sum u_n$ n'est pas abs. cv.
donc $\sum u_n$ est semi-cv.

3) (a) $0 < u_n \leq \frac{1}{5^{2n-1}} \leq \frac{5}{(25)^n}$ or $\sum \frac{1}{25^n}$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv.

(b) $$\sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{5^{2k-1}} \cdot \frac{1}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{5^{2n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{25}} \times \frac{1}{2n+1}$$
$$\leq \frac{25}{24} u_{n+1}$$

$$\frac{25}{24} u_3 = \frac{25}{24} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3 \times 2^3 \times 5^4} = \frac{1}{15 \times 10^3} \leq 10^{-3}$$

or $$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=1}^{2} u_k = \sum_{k=3}^{+\infty} u_k \leq \frac{25}{24} u_3 \leq 10^{-3}$$

donc $\sum_{k=1}^{2} u_k$ est 1 valeur approchée de $\sum_{k\geq 1} u_k$ à 10^{-3} près.

Ex 3

1) $f_n(x) \longrightarrow x \implies f_n \longrightarrow f$ simplement avec $f(x) = x$

2) $|f_n(x) - f(x)| = \left| x + \ln\left(1 + \frac{x e^{-x}}{n}\right) - x \right| = \left| \ln\left(1 + x \frac{e^{-x}}{n}\right) \right| = \ln\left(1 + x \frac{e^{-x}}{n}\right) = g_n(x)$

$g_n'(x) = \frac{e^{-x} - x e^{-x}}{n} \times \frac{n}{n + x e^{-x}} = \frac{e^{-x}(1-x)}{n + x e^{-x}}$

x	0		1		$+\infty$
g_n	0	$\nearrow$	$\ln\left(1+\frac{e^{-1}}{n}\right)$	$\searrow$	0

donc $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \ln\left(1 + \frac{e^{-1}}{n}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

donc $f_n \to f$ uniformément.

3) $\lim_{+\infty} \int_0^1 \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right) dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$ (car $f_n \to f$ uniformément)