Aucun document personnel autorisé - Pas de calculatrice

Exercice 1 : Série de Fourier *(barème indicatif : 6,5 points)*

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f la fonction 2π périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=|x|$.
   (a) Déterminer les coefficients de Fourier de f.
   (b) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(2x)+3+\cos(3x)$. Déterminer la série de Fourier de f après avoir justifié que f est périodique.
3. Soit f la fonction 2π périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[0;2\pi[$ par $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$.
   (a) Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi,4\pi]$.
   (b) Soit S la série de Fourier de f. Sans calculer $S(x)$ pour x quelconque, calculer $S(2\pi)$.

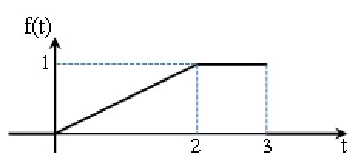
Exercice 2 : Série entière *(barème indicatif : 6,5 points)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$
2. Démontrer que la fonction $x\to\sin(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que $\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.
3. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. On note f sa somme sur $]-R,R[$.
   (a) Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients a_n pour que f satisfasse l'équation différentielle :
   $$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0$$
   (b) On suppose ces conditions vérifiées. Déterminer les a_n lorsque $a_0=1$.
   (c) Quelle est la fonction f obtenue ?

Exercice 3 : Transformée de Laplace *(barème indicatif : 7 points)*

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer la transformée de Laplace du signal ci-contre :



2. Trouver $f(t)$ sachant que $F(p)=\frac{(p+1)e^{-5p}}{p^2(p+10)}$.
3. Déterminer la fonction f causale telle que :
$$f(t)=t^2+\int_0^t\sin(t-u)f(u)du\ ,\ \forall t\geq 0$$
4. (a) Soit $\omega\in\mathbb{R}$, on pose $f(t)=t\sin(\omega t)$, $\forall t\in[0,+\infty[$. Calculer la transformée de Laplace de f (on pourra commencer par montrer que $f''(t)=2\omega\cos(\omega t)-\omega^2f(t)$, $\forall t\in[0,+\infty[$ ou passer par l'utilisation directe d'une propriété de la transformée de Laplace).
   (b) Résoudre l'équation différentielle :
$$y''(t)+4y(t)=\cos(2t)U(t)\quad\text{avec}\quad y(0)=1\quad\text{et}\quad y'(0)=0.$$

Formulaire

Table de Transformées de Laplace

$\mathcal{L}(\delta(t))$	1
$\mathcal{L}(U(t))$	$\dfrac{1}{p}$
$\mathcal{L}(tU(t))$	$\dfrac{1}{p^2}$
$\mathcal{L}(t^n U(t))$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{L}\left(te^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\mathcal{L}\left(t^n e^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\mathcal{L}(\cos(\omega t)\, U(t))$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(\sin(\omega t)\, U(t))$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a))$	$\mathrm{e}^{-ap}F(p)$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)$	$F(p+a)$
$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)$	$\dfrac{F(p)}{p}$
$\mathcal{L}(t f(t))$	$-F'(p)$
$\mathcal{L}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
Pour f T-périodique : $\mathcal{L}(f(t))$	$\dfrac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$ où $F_0(p) = \mathcal{L}(f_0(t))$
$\mathcal{L}(f * g)$	$F \times G$