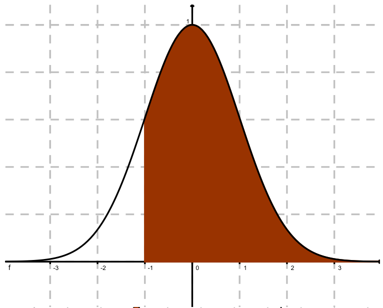
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

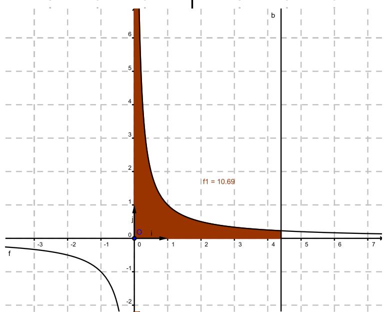
1 Objectifs

L'an dernier, nous avons étudié l'intégrale d'une fonction au sens de Riemann, en particulier l'intégrale d'une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle fermé borné I de $\mathbb{R}$.
Soit a un réel, $b \in]a;+\infty[$ et f une fonction intégrable sur$[X;+\infty[$ pour tout $X \in]a,+\infty[$.
L'objectif de ce chapitre est d'étudier des intégrales du type :

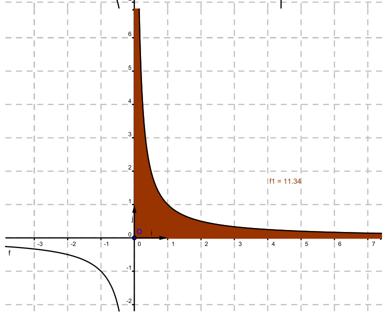
- ◇ $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)\ dx$



- ◇ $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\ dx$ (f non bornée au voisinage de a)



- ◇ $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ (f non bornée au voisinage de a)



2 Rappel des propriétés de l'intégrale au sens de Riemann

Théorème 1.
Soit f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $F : x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
On a donc : $F'(x) = \left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

Remarque 1.
Ne pas confondre avec $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$

Proposition 2.
Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a;b]$ et soit λ un réel alors :

1. Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.
2. Relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. Positivité : Si $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
4. Intégration d'une inégalité : si $g \geqslant f$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b g \geqslant \int_a^b f$.
5. Majoration de la valeur absolue : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
6. Valeur moyenne : $M = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$

Proposition 3. Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	*Domaine*
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Argth} x$	$]-1;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Argsh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Argch} x$	$]1;+\infty[$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$

Proposition 4.
Soient $u, v : [a; b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a; b]$. On a :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

3 Rappel sur les équivalents

Proposition 5. Caractérisation
Si $g \neq 0$ au voisinage de a alors on a :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$$

Proposition 6. Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\text{ch } x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\text{sh } x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}$$

4 Généralités sur les intégrales généralisées

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est **localement intégrable** sur I, si pour tout couple $(\alpha, \beta) \in I^2$, la restriction de f à l'intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta]$ est intégrable au sens de Riemann.

Contre-exemple historique : la fonction f telle que $f(x) = 0$ si x est un nombre rationnel et $f(x) = 1$ si x est un irrationnel, est un exemple de fonction n'étant pas localement intégrable. Il faut alors une théorie plus puissante, appelée théorie des Distributions afin de pouvoir quand même intégrer ce genre de fonctions.

Définition 2. Nature d'une intégrale généralisée.

1. Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale de f sur $[a;b[$ est convergente si
$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie. On la note alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
Si elle n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale de f sur $[a;b[$ diverge.

2. Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]a;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. On dit que l'intégrale de f sur $]a;b]$ est convergente si
$$\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$$
existe et est finie. On la note alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
Si elle n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale de f sur $]a;b]$ diverge.

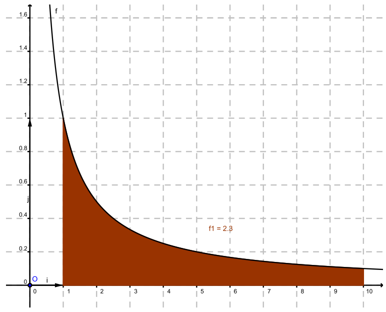
Remarque 2.
$\diamond$ A priori, on ne devrait pas s'autoriser à noter $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge, car $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'a de sens que si celle-ci converge, néanmoins, pour simplifier la rédaction, on l'écrira quand même !

$\diamond$ Par la suite, nous n'envisagerons pas à chaque fois chaque cas potentiel. Ce serait trop fastidieux. On décide de convenir que le choix d'un intervalle du type $[a;b[$ convient la plupart du temps et permet de comprendre les différentes propositions énoncées.

$\diamond$ Lorsque l'on calcule une intégrale sur un intervalle I, il faut bien s'assurer du fait que f est localement intégrable sur I. Voir l'exemple suivant.

Exemple 1.
Pourquoi le calcul suivant pose t-il problème ? $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_{-1}^{1} = 0$

4.1 Interprétation géométrique pour une fonction positive



$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ représente l'aire colorée}$$

Ainsi, si l'intégrale converge, cela signifie que l'aire du domaine délimité par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$ est finie. On a donc un domaine infini qui a une aire finie !

Exemple 2.
Déterminer la nature des intégrales suivantes et leurs éventuelles valeurs. Interpréter géométriquement le résultat.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}dt$

Lorsque f n'est pas définie aux deux bornes, on a la définition et propriété suivante :

Proposition 7.
Soit a et b appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$, f une fonction localement intégrable sur $]a; b[$, et $c \in]a; b[$.
Si $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Sinon, l'égalité précédente est fausse et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exemple 3.
Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ et calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} tdt$

Remarque 3.
On remarque d'après l'exemple précédent que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

Exemple 4.
Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.

4.2 Exemples fondamentaux = exemples de références !

- ☞ $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$
  - ✍ converge si $\alpha < 1$,
  - ✍ diverge si $\alpha \geqslant 1$.
- ☞ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$
  - ✍ converge si $\alpha > 1$,
  - ✍ diverge si $\alpha \leqslant 1$.

  Ces deux premiers items sont appelés intégrales de Riemann.
- ☞ $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx$
  - ✍ converge si $\alpha < 0$,
  - ✍ diverge si $\alpha \geqslant 0$.

4.3 Combinaison linéaire d'intégrales généralisées

Proposition 8.
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a; b[$ et soient α et β deux réels quelconques.

- ☞ Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors l'intégrale généralisée $\int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt$ converge également.
- ☞ Si une des deux intégrales généralisées converge et que l'autre diverge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt$ diverge.
- ☞ Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ divergent alors on ne connaît pas a priori la nature de l'intégrale généralisée $\int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt$.

Exemple 5.

1. Décomposer $\frac{2}{1-t^2}$ en éléments simples.

2. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{2}{1-t^2} dt$ converge.
3. Montrer que les intégrales généralisées de chacun des éléments simples divergent.

5 Critères de convergence d'une intégrale généralisée

5.1 A quoi ça sert ?

Il est souvent très difficile, voire impossible de calculer la valeur d'une intégrale. Il en est de même pour une intégrale généralisée. Il est donc très important de disposer quand même de critères nous permettant de connaître sa nature. Ainsi, même si on ne sait pas la calculer, on pourra savoir si une intégrale généralisée converge ou diverge. On dispose ensuite, dans le cas de la convergence, de moyens numériques pour avoir une valeur approchée de cette intégrale.

5.2 La condition nécessaire de convergence en l'infini

Proposition 9.
Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a; +\infty[$. Si f admet une limite non nulle en $+\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

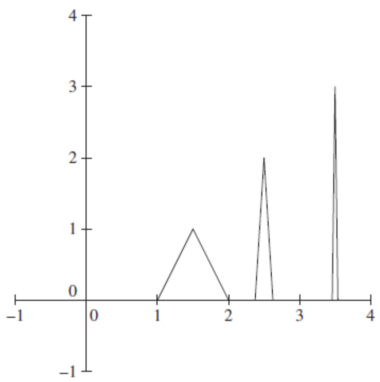
Autrement dit, cette proposition nous affirme donc que, si f admet une limite en $+\infty$, il est **nécessaire** que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ pour que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
Mais hélas cette condition n'est pas suffisante. En effet, par exemple, si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ mais $\int_1^{+\infty} f(t)dt = +\infty$, donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Attention, cette condition nécessaire de convergence n'est valable qu'en l'infini, c'est à dire qu'on prend $b = \infty$.

Remarque 4.

- On adapte facilement la proposition précédente en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.
- Si f n'a pas de limite en $+\infty$, $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ peut converger comme le montre l'exemple ci-dessous :

  Soit f une fonction continue, affine par morceaux, ayant la représentation graphique ci-dessous :



définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+\frac{1}{2}) = n$, et $f(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n2^n}) = 0$ et $f(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n2^n}) = 0$

5.3 Critères de convergences pour les fonctions positives

Proposition 10. Théorème de comparaison.
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a;b[$ à valeurs positives sur $[a;b[$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a;b[$ alors on a :

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

En réalité, on peut amender un peu ce théorème.
En effet, la condition $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in [a;b[$ n'est pas nécessaire. Comme le problème se situe au voisinage de b, il suffit d'avoir $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in [c;b[$ où $c \geqslant a$ car $\int_a^c f(t)dt$ est une intégrale classique et seul $\int_c^b f(t)dt$ est une intégrale généralisée.

Exemple 6.
Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge et que $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}dt$ diverge.

Remarque 5.

- Dans la pratique f ou g seront souvent les fonctions de référence, c'est à dire $\frac{1}{t^\alpha}$ ou $e^{-\alpha t}$.
- Pour montrer que $f \leqslant g$ au voisinage de b, on peut montrer que $\lim_b \frac{f}{g} = 0$

Exemple 7.
Montrer que $t^2e^{-t} \leqslant e^{-\frac{1}{2}t}$ au voisinage de $+\infty$, et en déduire la nature de $\int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt$.

Proposition 11.
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a;b[$ à valeurs positives sur $[a;b[$ telles que $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ avec l un réel non nul. Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Corollaire 12. Théorème d'équivalence
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a;b[$ à valeurs positives sur $[a;b[$. Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de mêmes natures.

Exemple 8.
Déterminer la nature de l'intégrale généralisée : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}dt$

Remarque 6.
Lorsque la fonction f est négative au voisinage du "point" étudié, on peut appliquer les résultats précédents en remplaçant f par $-f$.

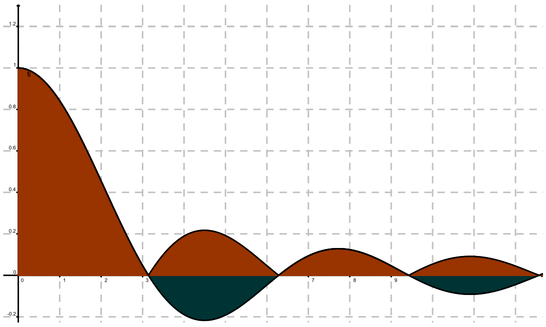
6 Convergence absolue

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu des critères qui ne s'appliquent qu'à des fonctions de signes constants sur un intervalle I. Lorsque cela n'est pas le cas, on peut essayer de se ramener à des fonctions positives en étudiant $\int |f|$.

Définition 3.
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a;b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument ou que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Théorème 13.
Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

Remarque 7.
L'absolue convergence est donc une convergence forte. Elle exprime le fait que les parties négatives d'une fonction dont on calcule l'aire, se transforment en parties positives et que malgré tout, l'aire reste finie.



$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$$

Exemple 9.
Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$

7 Semi-convergence

La réciproque du théorème 13 est fausse ; il existe des intégrales généralisées convergentes mais non absolument convergentes.

Définition 4.
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a; b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ diverge et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge, c'est à dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'est pas absolument convergente mais quand même convergente.

Exemple 10.
Le but de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.

1. Montrer que par prolongement par continuité $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ est localement intégrable sur $[0; +\infty[$.
2. En intégrant par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge grâce à une intégration par partie.
4. Montrer que $\forall t \in [1; +\infty[, 0 \leqslant \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2} \leqslant |\sin(t)|$.
5. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge. Conclure.

8 Exercices

Exercice 1.
Déterminer la nature et la valeur lorsqu'elles convergent des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2}dt$

Exercice 2.
Soit f une fonction définie et continue sur $]a;+\infty[$ avec a un réel. Soit b un réel avec $b > a$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $\displaystyle\lim_a f = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.
2. Si $\displaystyle\lim_a f \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
3. Si $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$ alors $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ converge.
4. Si $\displaystyle\lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}^* \cup \{\mp\infty\}$ alors $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ diverge.

Exercice 3.
Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{t-1}dt$

Exercice 4.
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\ln|t|}dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{\ln t}dt$
7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\ln t}dt$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx$
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$

Exercice 5.
Déterminer la nature des intégrales suivantes. On précisera si elles sont semi-convergentes.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t^2\, dt$

Exercice 6.
Déterminer la nature des intégrales suivantes, en discutant éventuellement suivant les valeurs des paramètres α et β réels :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\left(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$

Exercice 7.
Calculer les intégrales suivantes aprés avoir montré leur convergence :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+3}dx$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{x^2-3x+2}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx, n \in \mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

Exercice 8.

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ convergent et ont des valeurs opposées.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

Exercice 9.
On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}dt \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt.$$

1. Montrer que ces intégrales convergent et qu'elles sont égales.
2. En effectuant le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dans l'intégrale $I+J$, calculer alors la valeur commune de I et J.

Exercice 10.
On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx.$$

1. Montrer que ces intégrales convergent et qu'elles sont égales.
2. En déduire que $I = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$.
En transformant cette dernière intégrale, en déduire la valeur de I.