LES SÉRIES ENTIÈRES

1 Les séries entières

Définition 1.
On appelle série entière, la série de fonctions de terme général $a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels et x un réel. La série entière s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1.1 Domaine de convergence

Le domaine de convergence, noté D_c, est l'ensemble des x pour lesquels la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge simplement.

Exemple 1.
Déterminer le domaine de convergence des séries suivantes : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Sur les exemples précédents, le domaine de convergence est toujours un intervalle. Mais est-ce toujours le cas ?

Lemme d'Abel
On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour un réel x_0 non nul. On montre alors que :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout réel x vérifiant $|x| < |x_0|$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-r; r]$ avec $0 < r < x_0$.

Nous déduisons du Lemme d'Abel :

Théorème 1. *Rayon de convergence*
Pour toute série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, une seule des situations suivantes est réalisée :

1. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ne converge que pour $x = 0$. On dit que le rayon de convergence est égal à 0.

2. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.

3. il existe un unique réel R , appelé rayon de convergence, tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit absolument convergente sur l'intervalle $]-R; R[$ et divergente si $x > R$ ou si $x < -R$.

Remarque 1.
Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec R strictement positif. Soit x tel que $|x| = R$.
On ne peut rien dire sur la nature de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exemple 2.
Déterminer le rayon de convergence des séries de l'exemple 1.

1.2 Calcul du rayon de convergence

Proposition 2. Lemme d'Hadamard
Supposons que les a_n sont non nuls à partir d'un certain rang.
Si $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = L$ avec $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est égal à L.
(On aura aussi $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = L$)

Exemple 3.
Déterminer le domaine de convergence de la série entière : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$

1.3 Comparaison de rayons

Proposition 3.
Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectivement notés R_a et R_b.

- Si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Longrightarrow |a_n| \leqslant |b_n|)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Exemple 4.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque a_n est le nombre de diviseurs $\geqslant 1$ de n.

1.4 Opérations algébriques sur les séries entières

Proposition 4.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

$\sum_{n\geqslant 0}(\lambda a_n)x^n$ a pour rayon de convergence R et si $|x| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n)x^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition 5.
Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ deux séries entières ayant respectivement R et R' pour rayon de convergence.

- Si $R \neq R'$, le rayon de convergence R'' de la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)x^n$ est $R'' = \min(R, R')$.
- Si $R = R'$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)x^n$ est R'' avec $R'' \geqslant R$.

Enfin, si $|x| < \min(R, R')$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Exemple 5.
Soient les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $a_n = 1$ et $b_n = \dfrac{1-2^n}{2^n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$.

1.5 Dérivées et primitive d'une série entière

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Proposition 6.
La série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et l'on a, $\forall x \in]-R, R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Exemple 6.
Déterminer la dérivée de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Proposition 7.
f admet sur $]-R, R[$ une primitive F, définie pour tout $x \in]-R, R[$ par :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemple 7.
Déterminer les primitives de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

2 Fonctions développables en série entière

2.1 Définition

On a vu que certaines séries pouvaient s'écrire sans le signe somme.

Exemple 8.
Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et écrire $f(x)$ sans le signe somme.

L'objectif de ce paragraphe est de voir, si réciproquement, il est possible d'écrire une fonction f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout x appartenant à un intervalle $]-R, R[$ avec R un réel strictement positif.
Si cette écriture est possible pour on dira que f est **développable en série entière** au voisinage de 0.

2.2 Série de Taylor

Proposition 8. Série de Taylor
Si f est développable en série entière, alors f est égale à $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. (Cette somme est appelée série de Taylor de f).

2.3 Conditions nécessaires

Proposition 9. Condition nécessaire
Pour que f soit développable en série entière (et donc égale à sa série de Taylor) il est nécessaire que :

- f soit de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.
- la série de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ait un rayon de convergence non nul.

2.4 Condition suffisante

Remarque 2.
Les deux conditions ci-dessus ne sont pas suffisantes comme le montre l'exemple ci-dessous :

Exemple 9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour x non nul et $f(0) = 0$

1. Montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ avec P_n un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-2$, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout x non nul.
2. En déduire que la fonction f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la série de Taylor de f et le rayon de convergence de cette série.
4. f est-elle développable en série entière ?

Proposition 10. Condition suffisante
Pour que la fonction f soit développable en série entière sur un intervalle ouvert centré en 0, il suffit qu'il existe des réels r ($r > 0$) et M tels qu'on ait :

$$\forall x \in]-r, r[, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leqslant M$$

La fonction est alors développable en série entiére sur l'intervalle $]-r; r[$.

Exemple 10.
Montrer que les fonctions suivantes sont développables en séries entières, déterminer la série et le domaine de convergence de la série.
a) $f(x) = \cos(x)$, b) $f(x) = \sin(x)$, c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, e) $f(x) = \ln(1+x)$

3 Résolution d'équations différentielles linéaires en utilisant les séries entières

3.1 Rappel des résultats fondamentaux sur les équations différentielles linéaires

- Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est de la forme :

  $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ où les a_i sont des fonctions et $a_n \neq 0$

  (autrement dit a_n n'est pas la fonction nulle).
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n forme un espace vectoriel de dimension n.
- En première année, on a appris à résoudre :
  - Les équations d'ordre 1 à coefficients non constants.

  - Les équations d'ordre 2 à coefficients constants.

- Les solutions d'une équation différentielle linéaire sont la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution de l'équation avec second membre.

3.2 Utilisation des séries entières

Une des méthodes permettant de trouver des solutions d'une équation différentielle linéaire est de chercher des solutions développables en séries entières. Cette méthode est intéressante lorsque les a_i sont des fonctions polynômes. Avec cette méthode, on ne trouve pas forcément toutes les solutions, mais uniquement celles qui sont développables en séries entières.

La méthodologie est la suivante :

- On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ comme solution de l'équation différentielle. La recherche de l'inconnue f, solution de l'équation différentielle, se transforme alors en la recherche de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- On exprime alors $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, ...

- On cherche le développement en série entière du second membre de l'équation différentielle, ainsi que son rayon de convergence.

- On réinjecte tout ceci dans l'équation différentielle afin d'établir, par identification une relation de récurrence sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- A partir de la relation de récurrence du point précédent, on conjecture une relation donnant a_n en fonction de n, que l'on démontre ensuite par récurrence.

- Dans certains cas, une fois l'expression de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvée, on cherche, à partir du développement en série entière donné par $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, l'expression de la fonction f.

Exemple 11.
Soit (E) l'équation différentielle : $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières et déterminer son rayon de convergence.

2. Reconnaître la fonction précédente.

3. Un logiciel de calcul formel donne comme solution de (E) :

$$y = \frac{c_1 e^x}{x^2} + \frac{c_2 e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

Est-ce cohérent avec la question précédente ? Pourquoi n'a t-on pas trouvé toutes ces solutions en 1) ?

4 Exercices

Exercice 1.
Quel est le domaine de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+4} x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} x^n$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$
7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-4)^n} x^{2n+1}$

Exercice 2.
Donner la représentation en série entière des fonctions suivantes, ainsi que le domaine de validité :

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+5x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3-2x}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$
4. $f(x) = xe^{3x}$
5. $f(x) = x^2 \ln(1+x^2)$
6. $f(x) = \arctan x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Exercice 3.
Calculer le rayon de convergence R et la somme des séries entières de variable réelle suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-n+4}{n+1} x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n$

Exercice 4.

1. Donner le développement en série entière S de f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ ainsi que son rayon de convergence.
2. Déterminer le domaine de convergence de S.
3. Montrer que la série S converge uniformément sur $[0;1]$.
4. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 5.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 4xy'' + 2y' + y = 0$$

1. Déterminer en fonction de a_0, les coefficients a_n pour que la série : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E).
2. Vérifier que l'on a :

$$y(x) = \begin{cases} a_0 \operatorname{ch} \sqrt{-x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^- \\ a_0 \cos \sqrt{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Exercice 6.
On considère l'équation différentielle de Bessel (E_n) où n est un entier positif ou nul :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

1. En effectuant le changement de fonction $y = x^n u$ montrer que u satisfait à l'équation différentielle (E_n') : $xu'' + (2n+1)u' + xu = 0$.
2. Déterminer les solutions de (E_n') développables en série entière et déterminer leur rayon de convergence. On notera u_n la solution telle que $u_n(0) = 1$.
3. On appelle fonction de Bessel d'ordre n la fonction définie par $J_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} x^n u_n(x)$. Justifier que J_n est une solution de (E_n).

   Les fonctions de Bessel sont utilisées dans plusieurs domaines de la physique.