LES SÉRIES NUMÉRIQUES

Dans tout le chapitre on notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$.

1 Introduction

Exemple 1. Exemple historique
On trouve dans les écrits d'Aristote, les quatre arguments de Zénon d'Elée (Ve avant J.C.) prouvant l'impossibilité du mouvement. Un des arguments, le paradoxe de la dichotomie est le suivant :
Un mobile pour aller de A en C doit d'abord parcourir la moitié du chemin, puis la moitié du chemin restant, et ainsi de suite... In fine, le mobile ne pourra donc pas arriver en C au bout d'un temps fini.
Modéliser le problème de Zénon et répondre à son paradoxe.

Au cours des siècles les scientifiques ont été amenés à étudier des sommes et à étudier la convergence de ces sommes pour une infinité de termes. Les principales questions auxquelles les scientifiques ont dû répondre sont les suivantes :

- Lorsque l'on ajoute une infinité de termes positifs, le résultat est-il l'infini ?
- D'une façon générale que peut-on dire de la somme d'une infinité de termes ?
- Peut-on calculer la valeur exacte d'une somme d'une infinité de termes ?
- Peut-on intervertir l'ordre des termes ?
- Peut-on regrouper les termes ?

Commençons par illustrer la dernière question, les autres questions ayant leur réponse dans les différents paragraphes qui vont suivre.

Exemple 2.
Considérons la somme : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i$

1. Calculer S_5 et S_6.
2. On appelle S la somme de S_n pour "$n\ infini$". On pourrait écrire : $S = (1-1)+(1-1)+....$, $S = 1+1-1-1+1+1-1-1+1+1-....$

En simplifiant S dans les deux expressions proposées, répondre au dernier point.

2 Généralités sur les séries numériques

2.1 Définition

Définition 1. Définition d'une série.
On appelle série (numérique) de terme général (u_n) que l'on note $\sum u_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.
Une série est donc une suite particulière.

Définition 2. Convergence d'une série.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S alors la série $\sum u_n$, est dite convergente et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$

On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{i=n} u_i$$

Définition 3. Divergence d'une série vers l'infini.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite divergente et on a (par abus de notation) : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \pm\infty$

Définition 4. Divergence d'une série.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite divergente.

Remarque 2.

- Déterminer la nature d'une série, c'est dire si la série est convergente ou divergente.
- Le premier terme de la série peut être $n = n_0 > 0$, on a alors une série du type : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
  Cela ne change pas la nature de la série.

Exemple 3.
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique, de 1er terme $u_0 = a$ et de raison $q \neq 1$.
Etudier la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.2 Propriétés

Proposition 1. Condition Nécessaire de Convergence (CNC)

Pour qu'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge il est nécessaire mais pas suffisant que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 3.

Dans la pratique, on utilise plutôt la contraposée de cette CNC : si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente.

Exemple 4.

1. Peut-on savoir, sans calcul, si les deux séries de terme général $\sqrt{n}$ et $\frac{1}{n}$ sont convergentes ?
2. Soit k un entier strictement positif. Montrer que : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{k}$
3. En déduire la nature de la série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

La CNC est toujours la première chose que l'on doit vérifier avant de commencer à étudier la nature d'une série.

Proposition 2.

1. Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et λ un réel quelconque, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n$ est de même nature que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Soit deux séries, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ toutes deux convergentes, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$ est convergente et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$

Ainsi, on observe que l'ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries numériques quelconques muni des lois + et . classiques.

Remarque 4.

ATTENTION, si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ne sont pas toutes deux convergentes, alors, en général $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$

3 Séries de référence

3.0.1 Séries de Riemann (Bernhard Riemann 1826 - 1866)

On appelle série de Riemann les séries du type : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. (p est un réel positif)

La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente si et seulement si $p > 1$.

Exemple 5.
Démontrer le résultat précédent.

3.0.2 Séries géométriques

On appelle série géométrique les séries de type : $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n0}.

- Si $|q| < 1$ alors la série converge et on a : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = u_{n_0} \frac{1}{1-q}$
- Si $q \geqslant 1$ alors la série diverge et on a : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$ alors la série diverge car S_n n'admet pas de limite.

Exemple 6.
Écriture décimale des entiers :
Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} 9 \left(\frac{1}{10}\right)^n$ est une série convergente et calculer sa valeur exacte.

4 Séries à termes tous positifs

Les séries à termes tous positifs sont des séries très importantes. Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite série à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$. Des critères variés sont mobilisables pour l'étude de la convergence de telles séries.

4.1 Critère de comparaison

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, et on a alors $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est divergente aussi.

Remarque 5.
ATTENTION :

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est divergente, alors on NE peut PAS écrire : $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Exemple 7.
Déterminer la nature des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2+5^n}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$.

4.2 Test d'équivalence

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries à termes positifs. Si il existe un réel $c > 0$ tel que $u_n \sim cv_n$ alors les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de même nature.

Exemple 8.
Étudier la nature des séries : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$.

4.3 Critère de D'Alembert (Jean le Rond d'Alembert : 1717-1783)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$

- Si $L < 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.
- Si $L > 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente.
- Si $L = 1$ alors ce critère ne permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ce critère est très alléchant vu sa simplicité de mise en oeuvre. Malheureusement, on arrive souvent au cas d'indétermination.

Exemple 9.
Étudier la nature des séries : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

4.4 Critère de Cauchy (Baron Augustin Cauchy : 1789 - 1857)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$

- Si $L < 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.
- Si $L > 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente.
- Si $L = 1$ alors ce critère ne permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ce critère plus difficile à mettre en œuvre que le critère de D'Alembert est néanmoins très intéressant pour des séries dont le terme général est "garni" de puissance nième.

Exemple 10.

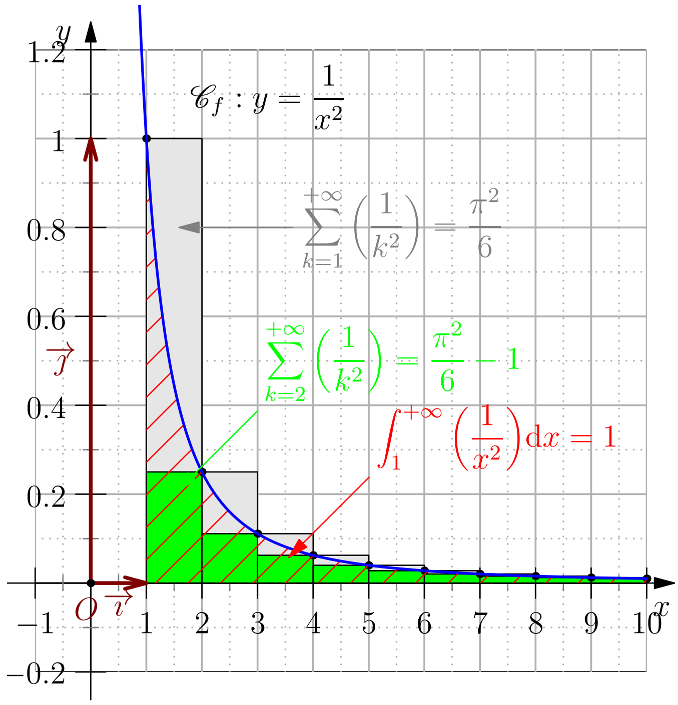
Étudier la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$

4.5 Critére de comparaison à une intégrale généralisée

Soit f la fonction associée à la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en posant $f(n) = u_n$. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $x \geqslant n_0$ f est définie, continue, positive et strictement décroissante sur l'intervalle $[n_0; +\infty[$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

Exemple 11.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.



4.6 Formule de Stirling

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

5 Séries alternées

5.1 Définition

Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite alternée si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}u_n \leqslant 0$.

Exemple 12.
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée.

5.2 Critère spécial des séries alternées

Soit la série alternée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ telle que $|u_n| = \alpha_n$ avec $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes tous positifs. Si à partir d'un certain rang $N \geqslant n_0$, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ alors la série alternée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est convergente.

Exemple 13.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ est convergente.

Remarque 6.

La condition (α_n) décroissante n'est pas nécessaire pour la convergence d'une série alternée, comme le montre la série de terme général $\frac{1+3(-1)^n}{4n^2}$.

5.3 Majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées

Soit $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ une série vérifiant le critère spécial des séries alternées. S converge vers un réel L.

On a $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$, avec $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

S_n est une valeur approchée de L et R_n est l'erreur commise en remplaçant L par S_n.

En général on ne connait pas R_n l'erreur commise, mais pour les séries vérifiant le critère spécial des séries alternées on a le résultat suivant :

$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$

Exemple 14.

On admet que la série précédente, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, convergente vers $-\ln(2)$.

Déterminer une valeur approchée de $\ln(2)$ à $0,2$ près.

Vérifier l'erreur à l'aide de la calculatrice.

6 Séries absolument convergentes

6.1 Définition

Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est elle même convergente.

6.2 Théorème

Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ absolument convergente est convergente. La réciproque de ce théorème est fausse c'est à dire qu'il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes. Ces séries sont dites semi-convergentes.

6.3 Remarque importante

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'en essayant de montrer qu'une série est absolument convergente, on introduit alors $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite à termes tous positifs. Il faut alors montrer que la série à termes tous positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente et pour cela nous disposons des 5 critères ou tests cités précédemment. Si on y arrive alors d'après le théorème, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.

Exemple 15.
Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

7 Exercices

Exercice 1.
Calculer, lorsqu'elles convergent, les séries suivantes :

1. $3 + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{4^{n-1}} + \cdots$
2. $0,37 + 0,0037 + \cdots + \frac{37}{100^n} + \cdots$
3. $1 + \frac{e}{3} + \cdots + \left(\frac{e}{3}\right)^n + \cdots$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}3^{n-1}$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$

Exercice 2.
A l'aide d'un des trois critères vus en cours, **critère de comparaison (§ 4.1)**, **test d'équivalence (§ 4.2)** et **critère de D'Alembert (§ 4.3)**, étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$
7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$
8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+5}{n2^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+1}{2^n}$
11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^5}{n!}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n3^{n+1}}$

Exercice 3.
A l'aide du **critère de Cauchy (§ 4.4)**, étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{\frac{n}{2}}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{(\ln n)^n}$

Exercice 4.
Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+7}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n 5^{-n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1+e^{-n})$

Exercice 5.
Déterminer si les séries suivantes sont **absolument convergentes**, **semi-convergentes** ou **divergentes**.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+4}}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2}$

Exercice 6.

Un étudiant propose la rédaction suivante pour justifier la convergence de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$:

> On a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Or la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées puisque $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
> Le théorème d'équivalence permet donc de conclure à la convergence de la série proposée.

Commenter la démonstration proposée.

Exercice 7.

On considère un empilage de boule dont le rayon décroît au fur et à mesure. La boule du bas a un rayon $r_1 = 1$ mètre et la $(n+1)^{\text{ième}}$ boule a un rayon $r_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, r_n$

1. Calculer r_2, r_3, r_4, r_5. Conjecturer et démontrer une relation entre r_n et n.
2. Montrer que la pile peut devenir aussi haute que l'on veut.
3. Le matériau utilisé pour fabriquer les boules à une masse volumique de 1 tonne par m^3. Montrer que la masse totale de la pile ne peut dépasser 13 tonnes.

Exercice 8.

Soit pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{4^n(2n-1)}$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. Montrer que $R_n \leqslant \frac{4}{3} u_{n+1}$. En déduire que trois termes sont suffisants pour approcher $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.