SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1 Convergences d'une suite de fonctions

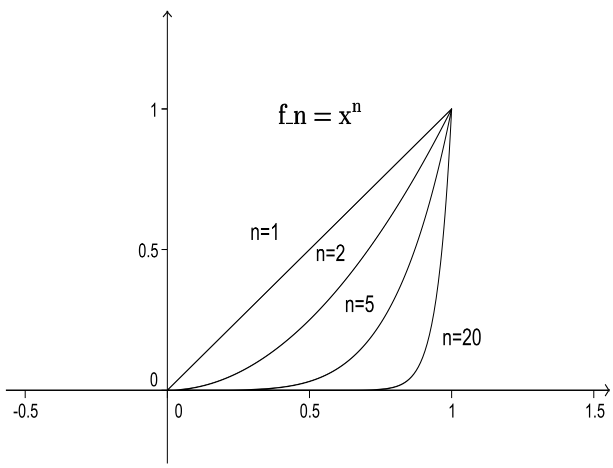
1.1 Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un même ensemble de définition D et à valeurs réelles ou complexes. On s'intéresse à la fonction f limite des f_n. Quel sens donner à cette limite ?
L'idée la plus naturelle est de définir, si elle existe, la fonction f par $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Si une telle fonction f existe, on dit que f est la **limite simple** de la suite (f_n).
Cette notion est la première qui a été utilisée, surtout à partir du XVIIIème, mais il s'avère qu'elle ne possède aucune propriété satisfaisante.

- **Si les f_n sont continues, il n'en est pas forcément de même pour f.**

  Exemple 1.
  Soit f_n définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

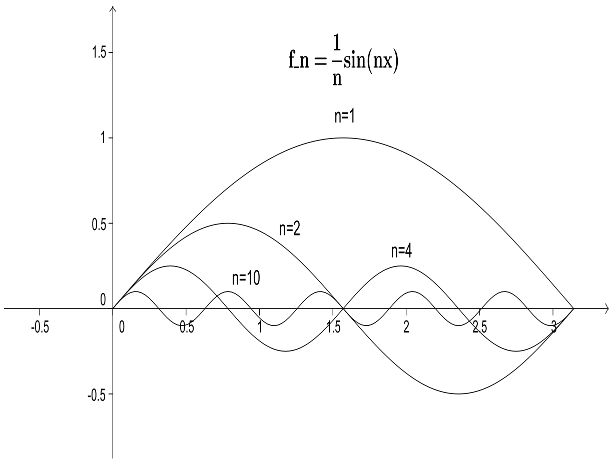
  1. Déterminer, pour tout x appartenant à $[0,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$
  2. Les fonctions f_n sont elles continues ?
  3. La fonction f est-elle continue ? Conclure.
  4. Peut-on dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x_0 \in [0,1]$?



- **Si les f_n sont dérivables et convergent simplement vers une fonction dérivable f, il n'y a aucune raison que les dérivées f_n' convergent, et même si c'est le cas, qu'elles convergent vers f'.**

  Exemple 2.
  Soit f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$
2. Calculer $f'(x)$ et $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Peut-on dire que $\dfrac{d}{dx}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

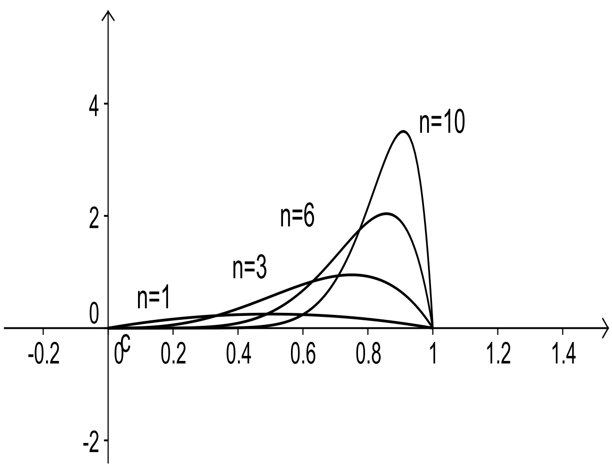


- **Si les f_n sont intégrables sur I, et converge vers f, on peut très bien avoir :**

$$\int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx$$

Exemple 3.
Soit f_n définie par $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$ sur $I = [0;1]$.

1. Déterminer, pour tout x appartenant à I, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$
2. Calculer $\int_I f_n(x)dx$.
3. Conclure.



1.2 Convergence uniforme

On est donc amené à chercher un autre critère de convergence qui puisse être compatible avec l'interversion des limites. On peut en particulier définir la notion de convergence uniforme.

1.2.1 Définition

Définition 1. Convergence uniforme
Une suite (f_n) de fonctions converge uniformément vers une fonction f sur un un intervalle I signifie que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant N, \forall x \in I, \mid f_n(x) - f(x) \mid \leqslant \varepsilon$

Remarque. Comparaison avec la convergence simple
La convergence simple sur I s'écrit de la façon suivante :
$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant N \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$
La différence entre les deux définitions provient uniquement du fait que, dans la convergence simple, la valeur de N dépend du choix de x et de ε, alors que dans la convergence uniforme, la valeur de N dépend de ε mais est indépendant du choix de x. La convergence uniforme entraîne donc la convergence simple.
Point méthode

- Pour montrer qu'une suite (f_n) de fonctions converge uniformément vers f :
  - On peut essayer de majorer $\mid f_n(x) - f(x) \mid$ par une suite (u_n) indépendante de $x \in I$ et qui converge vers 0.
  - On peut aussi montrer que $\sup\limits_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid$ tend vers 0 en $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite (f_n) de fonctions **ne** converge **pas** uniformément vers f :
  - On peut montrer que $\sup\limits_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
  - On peut déterminer une suite (α_n) appartenant à I telle que $\mid f_n(\alpha_n) - f(\alpha_n) \mid$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Exemple 4.
Pour chacun des exemples précédents, la suite $(f_n))$ converge t-elle simplement ou uniformément vers f ?

1.2.2 Continuité et convergence uniforme

Proposition 1.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I, convergeant uniformément vers une fonction f sur I. Alors f est une fonction continue sur I. Autrement dit :

$$\forall x_0 \in I, \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x_0)$$

1.2.3 Intégrale et convergence uniforme

Proposition 2.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur un intervalle I.
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $[a, b] \subset I$, $\int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

Exemple 5.
Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(x^2+n^2)}{n}dx$

2 Série de fonctions

Définition 2.
Soit (g_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I. Une série de fonctions est la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} g_k(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemple 6.
Soit ψ la fonction définie sur [0,1] par $\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$.

Proposition 3.
La série $(\sum_{k=0}^{k=n} g_k(x))$ converge uniformément vers $f = \sum_{k=0}^{+\infty}$ signifie que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant N, \forall x \in I, \mid \sum_{k=0}^{k=n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) \mid \leqslant \varepsilon$

Or, $\sum_{k=0}^{k=n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)$, l'inégalité de la définition ci-dessus est donc souvent délicate à mettre en oeuvre, on introduit donc une autre notion, plus facile à vérifier :

Définition 3.
La série $(\sum_{k=0}^{k=n} g_k(x))$ converge normalement signifie que la série (numérique)$(\sum_{k=0}^{k=n} \sup_{x\in I} \mid g_k(x) \mid)$ est convergente.

En pratique, on majore $\mid g_k(x) \mid$ par une constante M_k qui ne dépend pas de x, et on cherche à prouver que la série de terme général M_k converge.

Exemple 7.
Montrer que la fonction ψ définie dans l'exemple précédent converge normalement sur [0 ;1].

Proposition 4. Si la série converge normalement sur I, alors la suite des sommes partielles converge uniformément vers une fonction S sur I.

Cette propriété est très importante, car si une série converge normalement alors elle converge uniformément, on peut alors intervertir le signe $\sum$ et le signe $\int$. En effet, soit a et b deux réels et g_n une suite de fonctions continues sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} g_n(x)dx &= \int_a^b \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{k=n} g_k(x)dx && \text{Par définition d'une série} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=n_0}^{k=n} g_k(x)dx && \text{Car la convergence est uniforme} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{k=n} \int_a^b g_k(x)dx && \text{Car la somme est finie} \\
&= \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_a^b g_n(x)dx
\end{aligned}$$

Exemple 8. Calculer $\int_0^1 \psi(x)dx$.

3 Exercices

Exercice 1.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$ avec $x \in]0; +\infty[$.

1. (f_n) converge-t-elle simplement sur $]0; +\infty[$?
2. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $]0; +\infty[$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x + x^n \ln x$ avec $x \in]0, 1]$ et $f_n(0) = 0$.
Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 3.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ et $g_n(x) = nx^2e^{-nx}$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 4.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 5.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{nx}$ avec $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[0, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 6.

Les séries de terme général $(f_n(x))$ convergent elles uniformément, normalement sur I ?

1. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$, avec $n \geqslant 1$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$, avec $n \geqslant 1$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 7.

On s'intéresse à la série $\sum f_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$. On note S_n les sommes partielles de cette série et R_n ses restes.

1. Etudier la convergence simple puis normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour $x \geqslant 0$ et $n > 0$, montrer que $R_n(x) \geqslant S_{2n}(x) - S_n(x) \geqslant \dfrac{nx}{1 + 4n^2x^2}$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8.

Le but de l'exercice est de calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Pour cela on introduit l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

On montre, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$ pour $q > 0$, puis, par récurrence sur q que $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$, et enfin, en prenant $p = q = n$ on obtient que $\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

1. Montrer que $\sum t^n(1-t)^n$ converge normalement sur $[0,1]$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$