

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1 Convergences d'une suite de fonctions

1.1 Convergence simple

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un même ensemble de définition D et à valeurs réelles ou complexes. On s'intéresse à la fonction f limite des f_n . Quel sens donner à cette limite ?

L'idée la plus naturelle est de définir, si elle existe, la fonction f par $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Si une telle fonction f existe, on dit que f est la **limite simple** de la suite (f_n) .

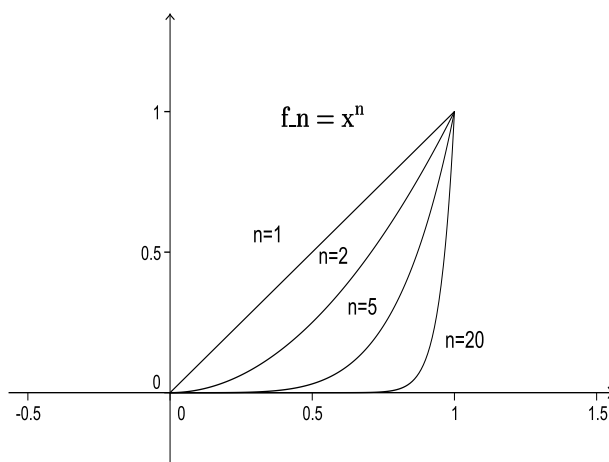
Cette notion est la première qui a été utilisée, surtout à partir du XVIIIème, mais il s'avère qu'elle ne possède aucune propriété satisfaisante.

- Si les f_n sont continues, il n'en est pas forcément de même pour f .

Exemple 1.

Soit f_n définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

1. Déterminer, pour tout x appartenant à $[0,1]$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
2. Les fonctions f_n sont-elles continues ?
3. La fonction f est-elle continue ? Conclure.
4. Peut-on dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ pour tout $x_0 \in [0,1]$?

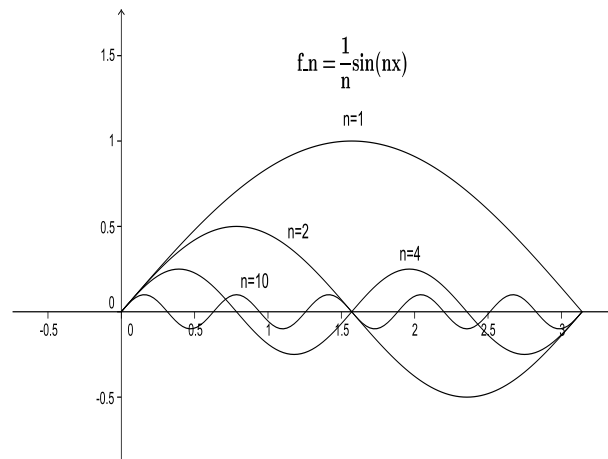


- Si les f_n sont dérivables et convergent simplement vers une fonction dérivable f , il n'y a aucune raison que les dérivées f'_n convergent, et même si c'est le cas, qu'elles convergent vers f' .

Exemple 2.

Soit f_n définie par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
2. Calculer $f'(x)$ et $f'_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Peut-on dire que $\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?



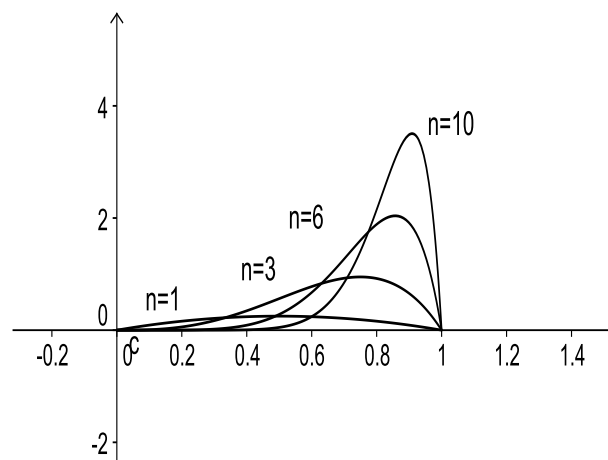
- Si les f_n sont intégrables sur I , et converge vers f , on peut très bien avoir :

$$\int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$$

Exemple 3.

Soit f_n définie par $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$ sur $I = [0; 1]$.

1. Déterminer, pour tout x appartenant à I , $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$
2. Calculer $\int_I f_n(x) dx$.
3. Conclure.



1.2 Convergence uniforme

On est donc amené à chercher un autre critère de convergence qui puisse être compatible avec l'interversion des limites. On peut en particulier définir la notion de convergence uniforme.

1.2.1 Définition

Définition 1. Convergence uniforme

Une suite (f_n) de fonctions converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarque. Comparaison avec la convergence simple

La convergence simple sur I s'écrit de la façon suivante :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La différence entre les deux définitions provient uniquement du fait que, dans la convergence simple, la valeur de N dépend du choix de x et de ε , alors que dans la convergence uniforme, la valeur de N dépend de ε mais est indépendante du choix de x . La convergence uniforme entraîne donc la convergence simple.

Point méthode

- Pour montrer qu'une suite (f_n) de fonctions converge uniformément vers f :
 - On peut essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite (u_n) indépendante de $x \in I$ et qui converge vers 0.
 - On peut aussi montrer que $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 en $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite (f_n) de fonctions ne converge pas uniformément vers f :
 - On peut montrer que $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
 - On peut déterminer une suite (α_n) appartenant à I telle que $|f_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)|$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Exemple 4.

Pour chacun des exemples précédents, la suite (f_n) converge t-elle simplement ou uniformément vers f ?

1.2.2 Continuité et convergence uniforme

Proposition 1.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I , convergeant uniformément vers une fonction f sur I . Alors f est une fonction continue sur I . Autrement dit :

$$\forall x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x_0)$$

1.2.3 Intégrale et convergence uniforme

Proposition 2.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur un intervalle I .

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } [a, b] \subset I, \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Exemple 5.

Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(x^2 + n^2)}{n} dx$

2 Série de fonctions

Définition 2.

Soit (g_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I . Une série de fonctions est la suite

(f_n) définie par $f_N(x) = \sum_{n=n_0}^N g_n(x)$ pour tout $x \in I$.

On dit que la série de fonctions $\sum g_n(x)$ converge simplement si la suite de fonctions $(f_N(x))$ converge simplement $\tilde{A}$ x fixé.

Autrement dit, on dit que la série de fonctions $\sum g_n(x)$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la série $\sum g_n(x)$ est convergente. La fonction limite est alors forcément donnée par la somme

$$x \mapsto \sum_{n=n_0}^{+\infty} g_n(x).$$

Exemple 6.

1. Déterminer les x pour lesquels la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge simplement.
2. Déterminer les x pour lesquels la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge simplement.
3. Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$. Vérifier que ψ converge simplement sur $[0, 1]$.

Proposition 3.

La série $(\sum_{k=0}^{k=n} g_k(x))$ converge uniformément vers $f = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, \left| \sum_{k=0}^{k=n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

Or, $\sum_{k=0}^{k=n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) = -R_n(x)$, l'inégalité de la définition ci-dessus est donc le plus souvent délicate à mettre en oeuvre, on introduit donc une autre notion, plus facile à vérifier :

Définition 3.

La série $(\sum_{k=0}^{k=n} g_k(x))$ converge normalement signifie que la série (numérique) $(\sum_{k=0}^{k=n} \sup_{x \in I} |g_k(x)|)$ est convergente.

En pratique, pour montrer qu'il y a convergence normale de la série de fonctions, on majore $|g_k(x)|$ par une constante M_k qui ne dépend pas de x , et on cherche à prouver que la série de terme général M_k converge ; et pour montrer qu'il n'y a pas convergence, on calcule le sup, ou on le minore par le terme général d'une série divergente.

Exemple 7.

Pour chacune des séries de fonctions de l'exemple précédent, dire s'il y a convergence normale sur leur domaine de définition. Si ce n'est pas le cas, peut-on montrer qu'il y a convergence normale sur un intervalle plus petit ?

Proposition 4. Si la série converge normalement sur I , alors la suite des sommes partielles converge uniformément vers une fonction S sur I .

Cette propriété est très importante, car si une série converge normalement alors elle converge uniformément et on a donc les propriétés vues pour la convergence uniforme des fonctions. En particulier :

- Si $\sum g_n(x)$ converge normalement sur I et les fonctions g_n sont continues sur I , alors la série de fonctions limite S est elle-même continue sur I .
- On peut aussi intervertir le signe $\sum$ et le signe $\int$. En effet, soit a et b deux réels et g_n une suite de fonctions continues sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} g_k(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^{k=n} g_k(x) dx && \text{Par définition d'une série} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sum_{k=n_0}^{k=n} g_k(x) dx && \text{Car la convergence est uniforme} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^{k=n} \int_a^b g_k(x) dx && \text{Car la somme est finie} \\ &= \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_a^b g_n(x) dx. \end{aligned}$$

En particulier, cela implique qu'on peut primitiver terme à terme une série qui converge normalement.

Exemple 8. Justifier que ψ est continue sur $[0, 1]$, puis calculer $\int_0^1 \psi(x) dx$.

3 Exercices

Exercice 1.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$ avec $x \in]0; +\infty[$.

1. (f_n) converge-t-elle simplement sur $]0; +\infty[$?
2. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $]0; +\infty[$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x + x^n \ln x$ avec $x \in]0, 1]$ et $f_n(0) = 0$.

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 3.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$ et $g_n(x) = nx^2 e^{-nx}$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 4.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 5.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx}$ avec $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[0, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 6.

Les séries de terme général $(f_n(x))$ convergent-elles uniformément, normalement sur I ?

1. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, avec $n \geq 1$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, avec $n \geq 1$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2+x^2}$.

1. Déterminer le domaine I sur lequel S est convergente.
2. Étudier la convergence normale de S sur I ;
3. En déduire que S est une fonction continue sur I.

Exercice 8.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Pour cela on introduit l'intégrale $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

On montre, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$ pour $q > 0$, puis, par récurrence sur q que $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$, et enfin, en prenant $p = q = n$ on obtient que $\int_0^1 t^n(1-t)^n dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

1. Montrer que $\sum t^n(1-t)^n$ converge normalement sur $[0,1]$.
2. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 9.

On s'intéresse à la série $\sum f_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. On note S_n les sommes partielles de cette série et R_n ses restes.

1. Étudier la convergence simple puis normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour $x \geq 0$ et $n > 0$, montrer que $R_n(x) \geq S_{2n}(x) - S_n(x) \geq \frac{nx}{1+4n^2x^2}$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.