SÉRIES DE FOURIER

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'écrire une fonction f périodique comme une série de fonctions cosinus et sinus : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$.
La série est appelée une série de Fourier.
En mathématiques, les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.
Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822, mais il fallut un siècle pour que les analystes dégagent les outils d'étude adaptés : une théorie de l'intégrale pleinement satisfaisante et les premiers concepts de l'analyse fonctionnelle. Elles font encore actuellement l'objet de recherches actives pour elles-mêmes.
Les séries de Fourier se rencontrent usuellement dans la décomposition de signaux périodiques que l'on trouve dans des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc.

2 Séries trigonométriques

Définition 1. Série trigonométrique

On appelle série trigonométrique S, toute série s'écrivant de la façon suivante :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Les nombres a_n et b_n sont des nombres réels indépendants de la variable t, représentant le temps, ω est un réel positif donné, appelé pulsation du signal et n est un entier naturel.

Remarque 1.
On rappelle que si ω est la pulsation d'un signal T-périodique alors $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$ (F étant la fréquence du signal).

Remarque 2.
Une série trigonométrique est donc une série de fonctions. Lorsque celle-ci converge simplement sur un ensemble I, S est alors une fonction définie sur I de variable t.

Exemple 1.
Déterminer la nature des séries trigonométriques $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\cos(nt) - \frac{2}{n^2}\sin(nt)$ et $\sum_{n\geqslant 0} n\cos(2nt)$.

Définition 2. Fonction T périodique
On dit qu'une fonction f est T périodique sur un ensemble I lorsque pour tout x appartenant à I, $f(x+T) = f(x)$.

Proposition 1.
Soit S une série périodique qui converge sur $\mathbb{R}$ avec $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$. Alors S est $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique.

Exemple 2.
Montrer la propriété précédente.

3 Développement en série de Fourier

L'objectif de ce paragraphe et de préciser les conditions pour qu'une fonction f puisse s'écrire sous forme d'une série trigonométrique.
D'après le paragraphe précédent, une série trigonométrique est périodique, il est donc nécessaire que f soit périodique pour qu'elle puisse s'écrire à l'aide d'une série trigonométrique.
Le théorème de Dirichlet suivant précise les conditions sur f pour que f soit développable en série de Fourier.

3.1 Série de Fourier d'une fonction périodique

Soit f est une fonction périodique, de période T, la série trigonométrique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$, définie par

$$\boxed{\begin{array}{c} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \alpha \text{ est un réel quelconque} \\ a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \\ a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ b_0 = 0 \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{array}}$$

est appelée **série de Fourier** associée à la fonction f, a_0, b_0, a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** associés à la fonction f.

Proposition 2. Fonctions paires et impaires
Dans le cas où la fonction f est paire ou impaire, il suffit de prendre comme intervalle, un intervalle centré en 0, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, c'est à dire que l'on prend $\alpha=-\frac{T}{2}$. On a alors :
Si f est une fonction paire :

$$\boxed{\begin{array}{c} a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)dt \\ a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n\in\mathbb{N}^*) \\ b_0=0 \\ b_n=0 \end{array}}$$

Si f est une fonction impaire :

$$\boxed{\begin{array}{c} a_0=0 \\ a_n=0 \\ b_0=0 \\ b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n\in\mathbb{N}^*) \end{array}}$$

Exemple 3.
Développer en série de Fourier la fonction f périodique de période 4, définie par :

$$\left\{\begin{array}{c} f(t)=0 \text{ si } t\ \in[-2;-1[\\ f(t)=1+t \text{ si } t\in[-1;0[\\ f(t)=1-t \text{ si } t\in[0;1[\\ f(t)=0 \text{ si } t\in[1;2[\end{array}\right.$$

3.2 Théorème de Dirichlet pour une fonction T-périodique C^1 par morceaux

3.2.1 Fonctions périodiques de classe C^1 par morceaux

Une fonction f T-périodique, est dite de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, si sur tout intervalle d'amplitude T, par exemple $[\alpha;\alpha+T]$, $(\alpha\in\mathbb{R})$, il existe un nombre fini de discontinuité de première espèce, c'est à dire des points où f n'est pas continue mais néanmoins tels qu'en ces points, la fonction admet une limite à droite et à gauche finies, et une dérivée à droite et à gauche.

Exemple 4.
La fonction $f(x)=E(x)$ est une fonction C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

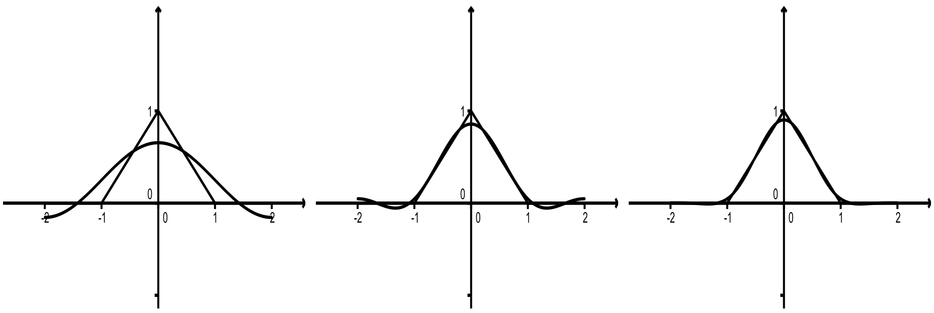
3.2.2 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel t_0 :

$$\frac{1}{2}\left[f\left(t_0^+\right)+f(t_0^-)\right]=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t_0)+b_n\sin(n\omega t_0)\right)$$

sachant que $f(t_0^+)=\lim\limits_{t\to t_0^+}f(t)$ et que $f(t_0^-)=\lim\limits_{t\to t_0^-}f(t)$.
et la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur tout intervalle où f est continue. En particulier, en tout point t_0 où f est continue, la somme vaut $f(t_0)$.

Exemple 5.
Les trois dessins ci-dessous représentent la fonction f de l'exemple 2, ainsi que
$g_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{k=n}a_k\cos(k\omega x)+b_k\sin(k\omega x)$ avec $n\in\{1,2,3\}$.
Déterminer l'expression de $g_n(x)$ pour $n\in\{1,2,3\}$



4 Forme complexe de la série de Fourier

La forme complexe du développement en série de Fourier d'une fonction f, périodique de période T, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ est :

$$S(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega t}\quad\text{avec :}\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)e^{-in\omega t}dt\quad(n\in\mathbb{Z})$$

En tout point où f est continue on a $f(t)=S(t)$.
Les coefficients de Fourier complexes c_n sont liés aux coefficients de Fourier réels a_n et b_n par les relations suivantes :

$$c_0=a_0,\ \text{et pour } n\in\mathbb{N}^*,\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\quad\text{et}\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

Exemple 6.
Donner le développement en série de Fourier complexe de la fonction de période $T = 1$, définie par : $f(t) = e^{-t} \quad t \in [0; 1[$

5 Formule de Parseval

Soit f une fonction T-périodique, vérifiant les conditions du théorème de Dirichlet alors on a la formule suivante :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2}$$

6 Application à la physique

Les séries de Fourier sont utilisées dans la théorie du signal.

6.1 Moyenne

$a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt$ représente la valeur moyenne de la fonction f sur un intervalle quelconque d'amplitude T.

Exemple 7.
Déterminer la valeur moyenne de l'exemple 2.

6.2 Fondamental

Le terme de rang 1 dans le développement en série de Fourier de la fonction f c'est à dire $a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$ est appelé le fondamental, sous entendu fondamental du signal représenté par la fonction f.

Exemple 8.
Exprimer le fondamental de l'exemple 2.

6.3 Harmoniques

Les termes de rang strictement supérieurs à 1 c'est à dire $a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$ sont appelés harmoniques de rang n.

Exemple 9.
Exprimer l'harmonique d'ordre 2 de l'exemple 2.

6.4 Spectre d'amplitude

Soit $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ appelé amplitude et $\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ appelé phase de l'harmonique de rang n. On appelle spectre de fréquence du signal, la représentation graphique de la fonction : $n \mapsto A_n$. Cette représentation graphique se fait sous forme d'un diagramme en bâtons.
Pour l'écriture complexe, on trace la représentation de la fonction : $n \mapsto |c_n|$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
On remarquera que $|c_n| = \frac{1}{2}A_n$

Exemple 10.
Représenter le spectre des fréquences de l'exemple 2, dans le cas réel et dans le cas complexe.

6.5 Puissance

La puissance d'un signal $f(t)$ entre a et b est donnée par $P = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt$.
La Formule de Parseval indique donc que la puissance d'un signal sur une période, donnée par la formule $P = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} [f(t)]^2\,dt$, peut se calculer à l'aide des coefficients du développement en série de Fourier de ce signal. En particulier, on trouve donc que la puissance totale d'un signal est égal à la somme de la puissance du signal de chacune de ses harmoniques et du signal $t \mapsto a_0$. C'est le principe de conservation de la puissance.

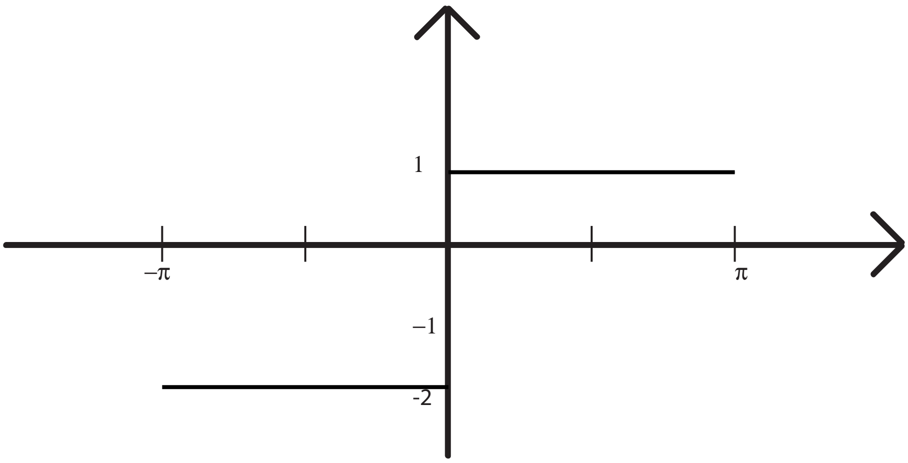
Exemple 11.
Calculer la puissance d'une harmonique.

7 Exercices

Exercice 1.
Soit f une fonction paire, 2π périodique, et égale à $f(t) = -\frac{2}{\pi}t + 1$ sur $[0; \pi]$.

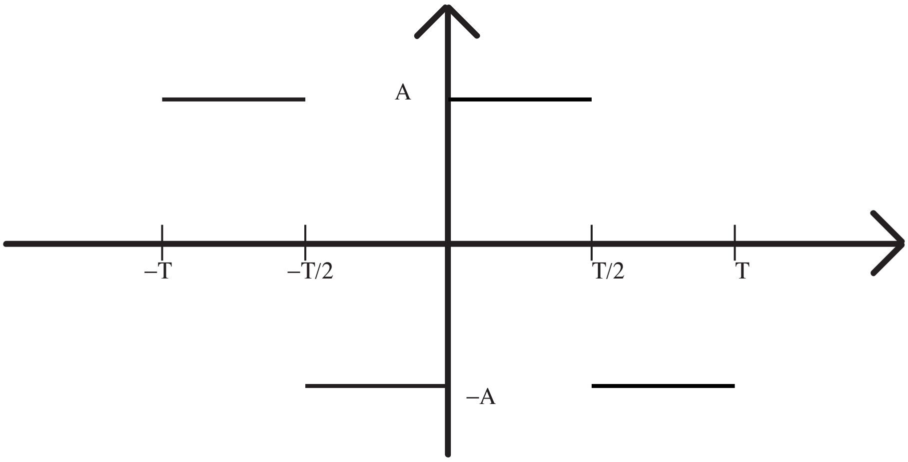
1. Représenter f.
2. Donner l'expression de f sur une période.
3. Déterminer le développement en série de Fourier de f.

Exercice 2.
On considère le signal f, 2π- périodique, représenté sur une période par le graphe suivant :



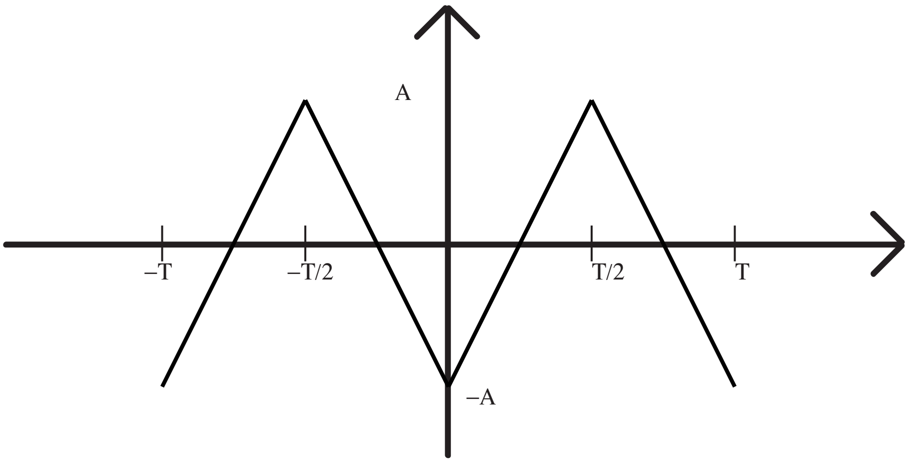
1. Déterminer le développement en série de Fourier du signal (vérifier si ce signal vérifie les conditions du théorème de Dirichlet).
2. En déduire la valeur de la série suivante : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$
3. Grâce à la formule de Parseval, donner la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

Exercice 3.
On considère le signal f, T-périodique, défini sur deux périodes par le graphe suivant :



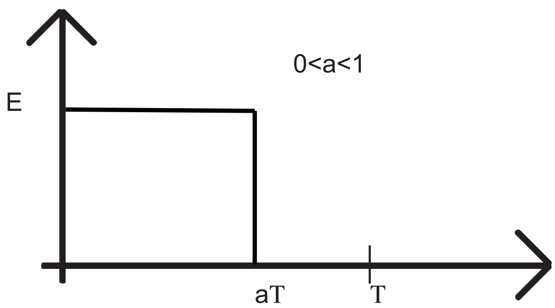
1. Déterminer le développement en série de Fourier de f.
2. Représenter graphiquement le spectre de ce signal.

Exercice 4.
On considère le signal f, T-périodique, défini sur deux périodes par le graphe suivant :



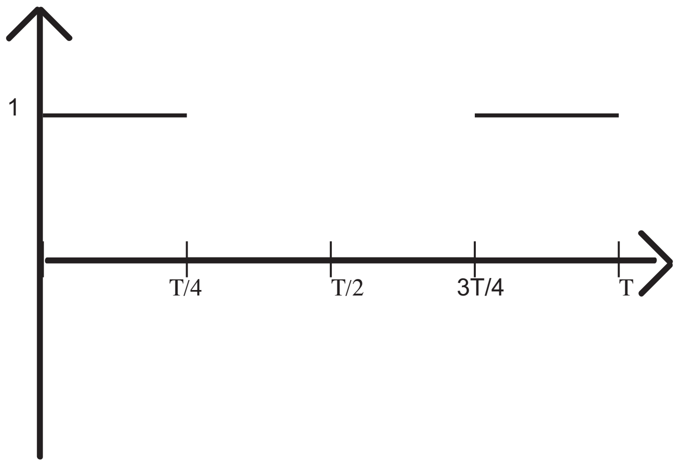
1. Déterminer le développement en série de Fourier de ce signal.
2. Représenter graphiquement le spectre de ce signal.

Exercice 5.
On considère le signal f, T-périodique, défini sur une période par le graphe suivant :



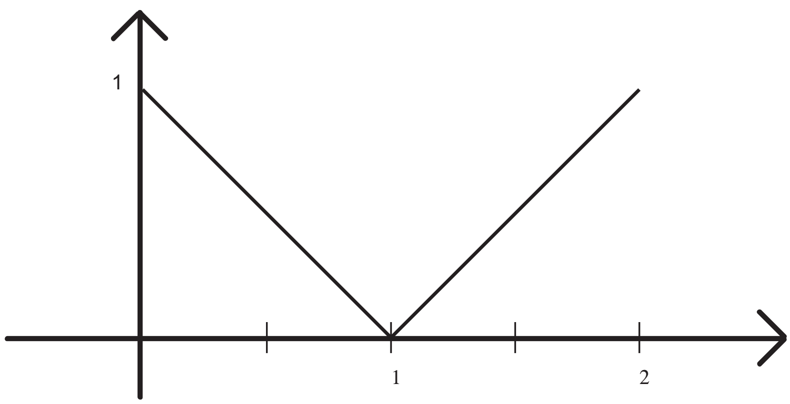
1. Déterminer le développement en série de Fourier de ce signal.
2. Que se passe t-il lorsque a tend vers 0 ? lorsque a tend vers 1 ? Est-ce cohérent avec les résultats trouvés au 1. ?
3. Représenter graphiquement le spectre de ce signal.

Exercice 6.
On considère le signal f, T-périodique, défini sur **une période** par le graphe suivant :



1. Représenter ce signal sur l'intervalle $[-\frac{5T}{4}; \frac{5T}{4}]$.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de ce signal.
3. Représenter graphiquement le spectre de ce signal.
4. Calculer la puissance de ce signal. En déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Exercice 7.
On considère le signal 2-périodique défini sur une période, par le graphe suivant :



Déterminer le développement en série de Fourier complexe de ce signal.

Exercice 8.
Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ fixé, on considère l'application 2π-périodique f définie par $f(x) = \cos(tx)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner l'expression du développement en série de Fourier de f.
2. Indiquer sur quel ensemble la série de Fourier de f converge vers f.
3. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ on a $\operatorname{cotan}(\pi t) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{t} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}\right)$ puis que tout $t \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ on a : $x\operatorname{cotan}(x) = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$

Exercice 9.
Déterminer le plus simplement possible les coefficients de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \cos x - 8\sin 3x$.

Exercice 10.
Soit f la fonction de période 2π, impaire, définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$. On note $\widehat{f}$ la série de Fourier de f, et $a_n(f)$, $b_n(f)$ ses coefficients.

1. Tracer la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$.
2. Quel est l'ensemble des réels x tels que $f(x) = \widehat{f}(x)$? Justifier.
3. On donne : $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{n^3} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

   Calculer les coefficients $b_n(f)$ pour tout $n \geqslant 1$, et écrire la série $\widehat{f}(x)$.
4. La moyenne de la fonction f^2 sur un intervalle de longueur 2π vaut $\dfrac{\pi^4}{30}$. En déduire la somme de la série : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^6}$.
5. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   Sans calculer F, montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, paire, et périodique.
6. Quelle est la relation entre $\widehat{f}$ et $\widehat{F}$? En déduire la valeur des coefficients $a_n(F)$ pour $n \geqslant 1$.
7. La moyenne de F sur un intervalle de longueur 2π est $\dfrac{\pi^3}{12}$. En déduire la valeur de $a_0(F)$, et écrire la série $\widehat{F}(x)$.

8. Calculer la somme de la série $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Exercice 11. Démonstration des formules du cours

1. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ une suite de nombres complexes. Démontrer que si la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.
2. Montrer alors que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ avec a_n et b_n les coefficients de Fourier donnés dans le cours. En déduire c_n en fonction de a_n et b_n.

Exercice 12.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 1, dérivable, telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(t+\lambda)$$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier. Soit c_n ses coefficients de Fourier complexes.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(in - e^{in\lambda})c_n = 0$.
3. En déduire pour quelle(s) valeur(s) de λ on peut effectivement trouver une telle fonction non identiquement nulle