TRANSFORMATION DE LAPLACE

1 Définition de l'espace E_0

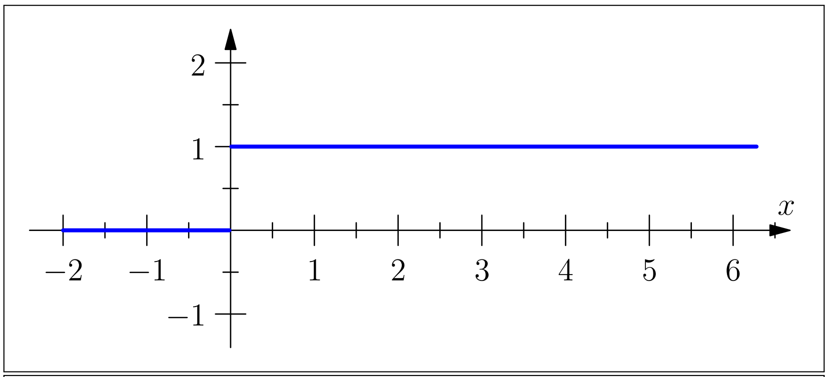
1.1 Fonctions causales

1.1.1 Définition

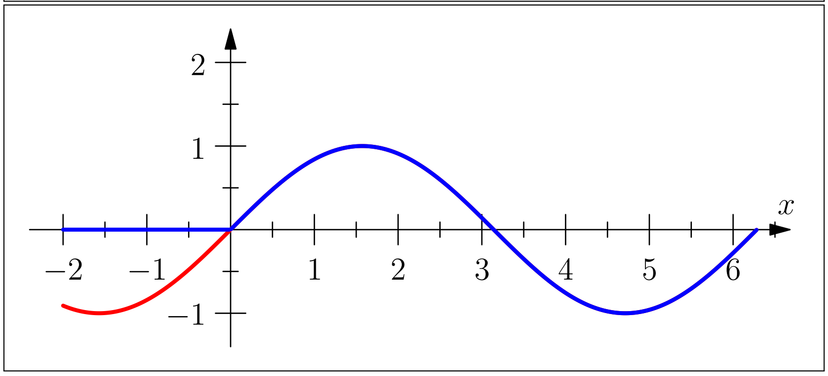
Une fonction f est dite causale si $f(t) = 0$ pour tout t strictement négatif.

1.1.2 Exemple fondamental : la fonction de Heaviside

On appelle aussi cette fonction, échelon unité. Elle est notée U et définie par :
$U(t) = 0$ si $t < 0$
$U(t) = 1$ si $t \geqslant 0$



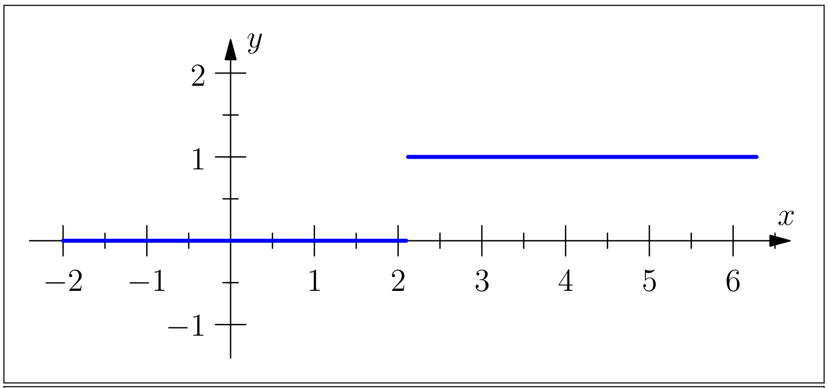
La fonction U sert à fabriquer des fonctions causales comme ci-contre : nous avons $\sin(t)$ (en rouge) qui n'est pas causale et $\sin(t)U(t)$ (en bleu) qui l'est.



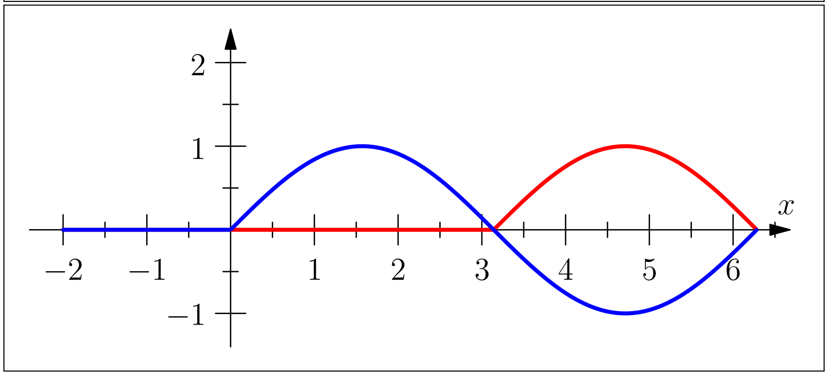
1.1.3 Représentation graphique d'une fonction définie par $g(t) = f(t - \alpha)$

La représentation graphique d'une fonction g, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'image de la représentation graphique de la fonction f par la translation de vecteur $\alpha \vec{i}$.

Par exemple, la translatée de la fonction unité est : $t \mapsto U(t-\alpha)$, α réel positif et on a donc :
$U(t-\alpha) = 0$ si $t < \alpha$
$U(t-\alpha) = 1$ si $t \geqslant \alpha$



Ici nous avons $\sin(t)U(t)$ (en bleu) et sa translatée de π qui est donc : $\sin(t-\pi)U(t-\pi)$ (en rouge)



1.2 Exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z = a + bi$ sa forme algébrique.
$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$.

Exemple 1.
Simplifier $e^{1+i} =$

L'exponentielle du nombre complexe $a + ib$ est donc la forme trigonométrique du nombre complexe de module e^a et d'argument b.

1.3 Les fonctions de E_0

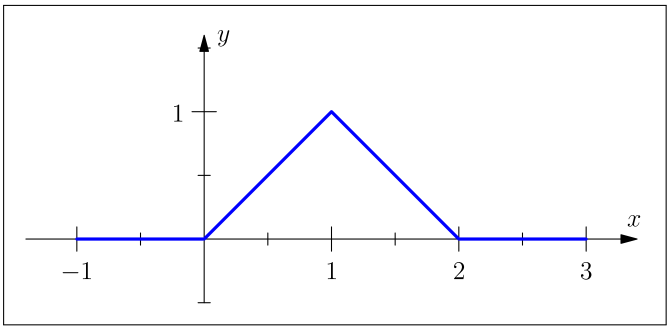
1.3.1 Définition

E_0 est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes des fonctions de la forme $t \mapsto U(t-\alpha)t^n e^{r\,t}$ où α est un réel positif, n un entier positif et r un nombre complexe quelconque, c'est à dire que E_0 est l'ensemble de toutes les fonctions qui peuvent s'écrire comme somme de fonctions du type $U(t-\alpha)t^n e^{r\,t}$ avec devant ce genre de fonctions des coefficients réels ou complexes.

Exemple 2.
Montrer que la fonction f définie par $f(t) = t^2 \sin 3t\; e^{-t}U(t-3)$ est une fonction de E_0.

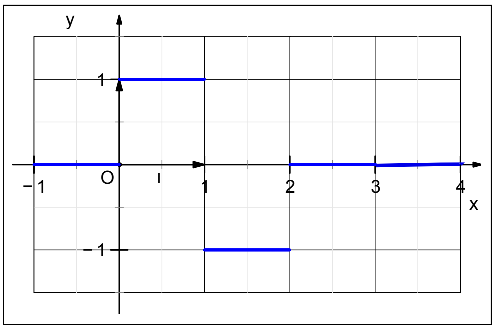
Exemple 3.

La fonction définie par : $f(t) = tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$ appartient à E_0. Sa représentation graphique est :



Exemple 4.

La fonction définie par : $g(t) = U(t) - 2U(t-1) + U(t-2)$ appartient à E_0. Sa représentation graphique est :



2 Transformation de Laplace dans E_0

2.1 Définition de la transformée de Laplace

2.1.1 Définition de l'exposant

Si une fonction g est de la forme $t \mapsto g(t) = kU(t-\alpha)t^n e^{r\,t}$, c'est à dire que c'est l'un des morceaux d'une fonction f appartenant à E_0, alors le complexe r est appelé exposant de la fonction g.

2.1.2 Propriété

Soit f une fonction appartenant à E_0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ est absolument convergente si p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]\sigma(f); +\infty[$ où $\sigma(f)$ est la plus grande des parties réelles des exposants des fonctions composants f. Le réel $\sigma(f)$ est appelé abscisse de convergence de la fonction f.

Exemple 5.
Soit f la fonction définie par : $f(t) = e^{2t}\cos(3t)U(t) + te^t\sin(t)U(t-\pi)$

1. Justifier que f est bien une fonction de E_0.
2. Déterminer les exposants des fonctions qui composent cette combinaison linéaire.
3. Sur quel intervalle $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge t-elle ?

2.1.3 Transformée de Laplace

Soit f une fonction appartenant à E_0.
La transformée de Laplace de f , notée F, est la fonction définie sur $]\sigma(f);+\infty[$ par :

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Elle est notée : $F=\mathcal{L}(f)$ ou $F(p)=\mathcal{L}\left(f\right)(p)$
En théorie, on est donc censé, avant de calculer la transformée de Laplace d'une fonction f causale, vérifier que $f\in E_0$ et calculer son abscisse de convergence $\sigma(f)$. Dans la pratique, toutes les fonctions que nous manipulons dans ce chapitre appartiennent à E_0 et leur abscisse de convergence en général est égale à 0. Néanmoins, il est naturel d'avoir cette rigueur de vérification, au cas où les calculs nous emmènent dans un espace plus compliqué !

2.2 Transformée de Laplace de l'échelon unité

$\mathcal{L}(U(t))=$

2.3 Transformée de Laplace de $f(t)=t^nU(t)$

$\mathcal{L}\left(t^nU(t)\right)=$

2.4 Transformée de Laplace de $f(t)=e^{-at}U(t)$

$\mathcal{L}(e^{-at}U(t))=$

2.5 Transformée de Laplace de $f(t)=te^{-at}U(t)$

$\mathcal{L}(te^{-at}U(t))=$

2.6 Propriétés de la transformation de Laplace

On suppose dans tout ce paragraphe que p appartient à l'intervalle $]\sigma(f);+\infty[\cap]\sigma(g);+\infty[$

2.6.1 Linéarité

Si f et g sont des fonctions appartenant à E_0 de transformées de Laplace respectives F et G et si α et β sont des nombres complexes quelconques alors si on note H la transformée de Laplace de $h=\alpha f+\beta g$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\alpha f+\beta g\right) &= \alpha\mathcal{L}(f)+\beta\mathcal{L}(g)\\ H &= \alpha F+\beta G\end{aligned}$$

Exemple 6.
Calculer la transformée de Laplace de $f(t)=\sin(t)U(t)$ et de $g(t)=\cos(t)U(t)$

2.6.2 Transformée de Laplace d'une dilatée : $t \mapsto f(at)$ $a \in \mathbb{R}^+$

Soit f une fonction appartenant à E_0 et soit $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Exemple 7.
Démontrer la formule ci-dessus.

Exemple 8.
Calculer la transformée de Laplace de $f(t) = \cos(\omega t)U(t)$ et $h(t) = \sin(\omega t)U(t)$ avec $\omega > 0$.

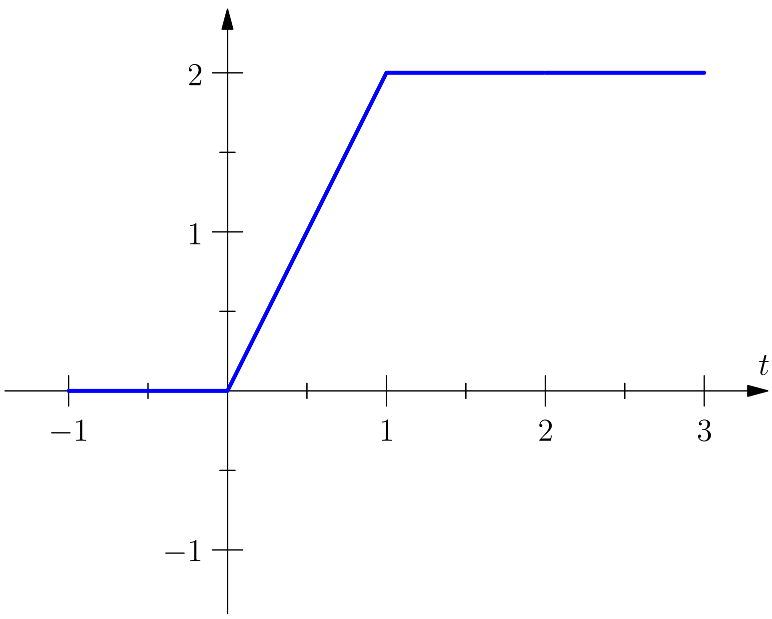
2.6.3 Transformée de Laplace d'une translatée : $t \mapsto f(t-\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}^+$

Soit f une fonction appartenant à E_0 et soit $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$\mathcal{L}\left(f(t-\tau)U(t-\tau)\right) = e^{-p\tau}F(p)$$

Le terme $e^{-p\tau}$ s'appelle le **facteur de retard.**
En clair, lorsqu'une fonction est retardée d'un instant τ sa transformée de Laplace est multipliée par $e^{-p\tau}$.
La démonstration de cette formule est la même que celle ci-dessus en effectuant le changement de variable $u = t - \tau$.

Exemple 9.
Calculer la transformée de Laplace du signal ci-dessous :



2.6.4 Multiplication par la variable

Soit f une fonction appartenant à E_0 et soit $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(-tf(t)) &= \frac{dF}{dp}(p) \\ \mathcal{L}((-t)^n f(t)) &= \frac{d^nF}{dp^n}(p) \end{aligned}$$

Exemple 10.
Calculer la transformée de Laplace de f définie par $f(t) = t\sin(\omega t)U(t)$.

2.6.5 Multiplication par e^{-at} où a est un réel quelconque

Soit f une fonction appartenant à E_0 et soit $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$\mathcal{L}\left(f(t)e^{-at}\right) = F(p+a)$$

Exemple 11.
Calculer la transformée de Laplace de f définie par $f(t) = e^{-at}\cos(\omega t)U(t)$.

2.6.6 Transformée de Laplace d'une dérivée nième

Soit f une fonction appartenant à E_0 et soit $F = \mathcal{L}(f)$ alors si f est n fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+) \\ \text{où} \quad f(0^+) &= \lim_{t\to 0^+} f(t) \end{aligned}$$

Exemple 12.
Calculer la transformée de Laplace de la dérivée de la fonction échelon unité.

2.7 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

2.7.1 Théorème de la valeur initiale

Si une fonction f appartenant à l'ensemble E_0 admet pour transformée de Laplace la fonction F, **alors**

$$\begin{aligned} \lim_{p\to+\infty} F(p) &= 0 \\ \lim_{p\to+\infty} pF(p) &= f(0^+) \end{aligned}$$

2.7.2 Théorème de la valeur finale

Si une fonction f appartenant à l'ensemble E_0 admet pour transformée de Laplace la fonction F et si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ **existe et est finie, alors :**

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Exemple 13.
Soit g la fonction définie par $g(t) = (\cos t)\, U(t)$.

1. Le théorème de la valeur initiale s'applique t'il à g ?
2. Le théorème de la valeur finale s'applique t'il à g ?

3 Produit de convolution dans E_0

3.1 Introduction

1ère expérience. On jette dans une rivière, en un temps très bref, au temps $t = 0$ une quantité $q(0)$ de colorant (biodégradable !).100 mètres plus bas, on mesure la concentration $c(t)$ de colorant, et on l'on a : $c(t) = q(0)h(t)$. On peut schématiser l'expérience suivant les deux graphiques suivants :
2ème expérience On jette maintenant au temps τ une quantité $q(\tau)$ de colorant. Si l'on suppose que la répartition du colorant ne varie pas au cours du temps et qu'elle reste proportionnelle à la quantité jetée, alors la concentration $c(t)$ trouvée au temps t est égale à $c(t) = q(\tau)h(t-\tau)$

3.2 Définition

On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f et g est une fonction h définie ci-dessous. Ce produit est noté $*$. On a :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Si f est causale, l'intégrale devient :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{0}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Si de plus g est causale alors la fonction h l'est aussi et on a :

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \text{ si } t < 0 \\ h(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx \text{ si } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

D'où la définition suivante :
Soient f et g deux fonctions appartenant à E_0.On appelle convolée des fonctions f et g dans cet ordre, la fonction causale h définie pour tout t positif par :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

3.3 Propriétés du produit de convolution

Le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition. De plus le produit de convolution est une loi dite interne, c'est à dire que l'on a :

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Si f et g appartiennent toutes deux à E_0 alors $h = f * g$ appartient aussi à E_0.

(démonstrations laissées au lecteur !)

3.4 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Si f et g appartiennent toutes deux à E_0 alors la convolée $h = f * g$ a pour transformée de Laplace le produit des transformée de Laplace de f et g, c'est à dire que l'on a :

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \times \mathcal{L}(g)$$

Cette propriété nous permettra d'obtenir la transformée de Laplace de fonctions qu'on ne peut calculer grâce aux propriétés déjà vues dans le paragraphe 2.6.

3.5 Transformée de Laplace de $\int_0^x f(t)dt$

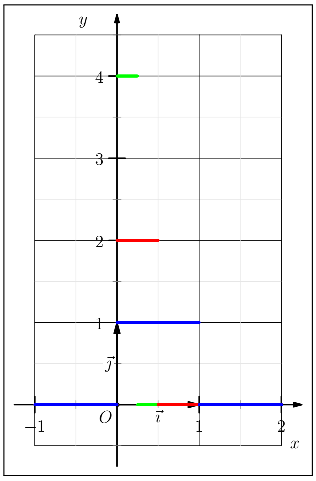
Soit f une fonction appartenant à l'ensemble E_0 et U la fonction échelon unité alors on a :

$$\forall x > 0 \ \ (U * f)(x) = \int_0^x f(t)U(x-t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

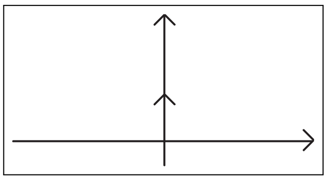
Si on note $F = \mathcal{L}(f(t))$ et en rappelant que $\mathcal{L}(U(t)) = \frac{1}{p}$, alors en utilisant le théorème ci dessus on obtient :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

4 Transformée de Laplace de l'impulsion unité



On considère la fonction f_n définie par : $f_n(t) = n$ si $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$ et $f_n(t) = 0$ sinon
dont voici la représentation graphique ci-contre pour quelques n = 1, 2 et 4.
Si on note $F_n(p) = \mathcal{L}(f_n(t))$ et en remarquant que $f_n(t) = nU(t) - nU(t - \frac{1}{n})$ alors on a $F_n(p) = \frac{n}{p} - \frac{n}{p}e^{-\frac{p}{n}}$



Maintenant si on fait tendre $n \to +\infty$, alors on obtient une pseudo fonction, qui est en fait ce qu'on appelle en mathématiques une distribution, mais qui n'est plus une fonction, qu'on appelle impulsion unité ou plus simplement Dirac, impossible à représenter, si ce n'est en faisant un schéma que tous les électroniciens utilisent :

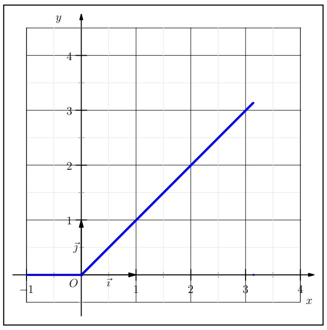
Cette distribution est notée δ et on a : $\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(p) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{p} - \frac{n}{p}e^{-\frac{p}{n}} = 1$

5 Transformation de Laplace des fonctions périodiques

Soit f une fonction T-périodique, causale, n'appartenant pas forcément à E_0. Soit f_0 la fonction définie par : $f_0(t) = f(t)$ si $0 < t < T$ et $f_0(t) = 0$ sinon telle que f_0 appartiennent à E_0 alors on a :

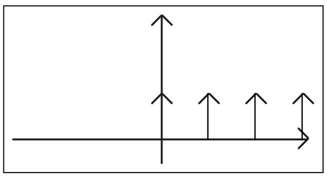
$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{\mathcal{L}\left(f_0(t)\right)}{1 - e^{-pT}}$$

Exemple 14.



Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f T-périodique, causale, définie sur $[0; T[$ par $f(t) = t$.

Exemple 15.
Le train d'impulsion
Cela correspond, en électronique à des flashs éclairs périodiques.
alors on a $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{1}{1 - e^{-pT}}$ car $\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1$



6 Table des transformées de Laplace

On note $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ où f est une fonction appartenant à E_0

$\mathcal{L}(\delta(t))$	1
$\mathcal{L}(U(t))$	$\frac{1}{p}$
$\mathcal{L}(tU(t))$	$\frac{1}{p^2}$
$\mathcal{L}(t^n U(t))$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}U(t)\right)$	$\frac{1}{p+a}$
$\mathcal{L}\left(te^{-at}U(t)\right)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\mathcal{L}\left(t^n e^{-at}U(t)\right)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\mathcal{L}(\cos(\omega t)\, U(t))$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(\sin(\omega t)\, U(t))$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a))$	$\mathrm{e}^{-ap}F(p)$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)$	$F(p+a)$
$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)$	$\frac{F(p)}{p}$
$\mathcal{L}(tf(t))$	$-F'(p)$
$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
Pour f T-périodique : $\mathcal{L}(f(t))$	$\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$ où $F_0(p) = \mathcal{L}(f_0(t))$
$\mathcal{L}(f * g)$	$F \times G$

7 Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle original de F ; on a alors : $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$. Cela signifie que connaissant la transformée de Laplace d'un signal, on retrouve, grâce à une lecture dans l'autre sens dans la table des transformées de Laplace, le signal.

7.1 Linéarité de la transformation de Laplace inverse

Soient $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ et $G(p) = \mathcal{L}(g(t))$, f et g étant deux fonctions appartenant à E_0. Soient λ et μ deux réels quelconques alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\lambda F(p) + \mu G(p)\right] = \lambda \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right] + \mu \mathcal{L}^{-1}\left[G(p)\right]$$

Cette propriété conduit, pour la recherche d'un signal dont on connait l'original, à transformer celui-ci en une somme d'éléments simples dont on peut facilement retrouver les originaux grâce à la lecture en sens inverse dans la table.

7.2 Processus à suivre pour la transformation de F(p) en somme d'éléments simples

1. s'il y a des retards, les traiter en premier, séparément.
2. pour des fractions rationnelles du genre $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ avec $\deg P < \deg Q$, on décompose dans $\mathbb{R}$ cette fraction en éléments simples. Les éléments simples de première espèce se traitent facilement. Pour ceux de seconde espèce, on doit mettre leur dénominateur sous forme canonique, pour retrouver des originaux en cosinus ou en sinus.

Exemple 16. Trouver l'original de $F(p) = \dfrac{1 - e^{-2p}}{p^2 + 3p + 2}$

Exemple 17. Trouver l'original de $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)\left(p^2 + 2p + 2\right)}$

7.3 Propriétés de la transformée de Laplace inverse

Soit f une fonction appartenant à l'ensemble E_0 et dont la transformée de Laplace est $F(p)$.

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[F'(p)\right] = -tf(t)$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\displaystyle\int_p^{+\infty} F(u)du\right] = \dfrac{f(t)}{t}$

8 Résolution des équations différentielles grâce à la transformée de Laplace

8.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'(t) + ay(t) = f(t)$$

où a est un réel quelconque, f une fonction appartenant à l'ensemble E_0 et y une fonction appartenant aussi à E_0.
On note $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ et $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$

En appliquant à l'équation (E), la transformation de Laplace on a alors :
$\mathcal{L}(y'(t)+ay(t)) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow \mathcal{L}(y'(t))+a\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow pY(p)-y(0^+)+aY(p) = F(p)$
d'où : $Y(p) = \dfrac{F(p)+y(0^+)}{p+a}$
puis grâce à la transformée de Laplace inverse, on recherche l'original de $Y(p)$ c'est à dire $\mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = y(t)$.

8.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

où a et b sont des réels quelconques, f une fonction appartenant à l'ensemble E_0 et y une fonction appartenant aussi à E_0.
On note $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ et $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$

En appliquant à l'équation (E), la transformation de Laplace on a alors :
$\mathcal{L}\left(y''(t)+ay'(t)+by(t)\right) = \mathcal{L}\left(f(t)\right) \Leftrightarrow p^2Y(p)-py(0^+)-y'(0^+)+a\left(pY(p)-y(0^+)\right)+bY(p) = F(p)$
d'où : $Y(p) = \dfrac{F(p)+py(0^+)+ay(0^+)+y'(0^+)}{p^2+ap+b}$
puis grâce à la transformée de Laplace inverse, on recherche l'original de $Y(p)$ c'est à dire $\mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = y(t)$.

Exemple 18. Résoudre l'équation différentielle $y''(t)+6y'(t)+9y(t) = t^2e^{-3t}$ sachant que $y(0)=\alpha$ et $y'(0)=\beta$

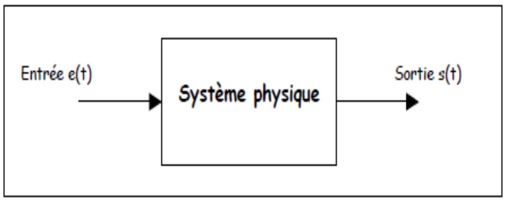
8.3 Résolution des systèmes différentielles d'ordre 1

La méthode consiste simplement à effectuer la transformation de Laplace de chacune des équations du système, qui sont du premier ordre. On aboutit ainsi à un système linéaire de n équations à n inconnues : $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, $\ldots, Y_n(p)$, dans lesquelles p joue le rôle d'un paramètre. Puis par recherche des originaux de chacune des $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, $\ldots, Y_n(p)$, on retrouve la solution du système différentiel de départ.

9 Application aux fonctions de transfert

9.1 Définition

Un système physique quelconque (électronique, électromécanique, pneumatique ...) produit une sortie $s(t)$ lorsqu'il est excité par un signal d'entrée $e(t)$.



On se propose d'étudier la réponse $s(t)$ d'un système linéaire à une entrée $e(t)$ telle que pour tout $t < 0$, $e(t) = 0$, en utilisant la transformation de Laplace.

Supposons que le système satisfait à l'équation :

$$a_0 s(t) + a_1 s'(t) + ... + a_n s^{(n)}(t) = b_0 e(t) + b_1 e'(t) + ... + b_m e^{(m)}(t)(m < n)$$

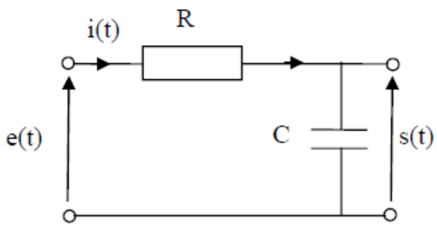
Pour simplifier l'étude, supposons que les conditions initiales sont telles que (système initialement au repos) :

$$e(0^+) = e'(0^+) = ... = e^{(m)}(0^+) = s(0^+) = s'(0^+) = ... = s^{(n)}(0^+) = 0$$

Dans ces conditions, on note $S(p)$ et $E(p)$ les transformées de Laplace de s et de e et on note $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$. H est appelée la fonction de transfert du système.

1. Exprimer $H(p)$ en fonction des coefficients $a_0, ..., a_n$ et $b_0, ..., b_m$.

9.2 Exemple



On considère le circuit électrique RC ci-contre. Nous considérons que c'est un système ayant une entrée e(t) et une sortie s(t) et nous supposons qu'il n'y a pas d'impédance qui charge la capacité. On obtient l'équation différentielle du système : $\dfrac{ds(t)}{dt} + a\ s(t) = e(t)$ avec $a = \dfrac{1}{RC}$

1. Déterminer la fonction de transfert du circuit.

2. Déterminer le signal réponse $s(t)$ lorsque le signal $e(t)$ d'entrée est égal à :

(a) Une impulsion.

(b) Un échelon unité.

(c) $k \sin(\omega t)$

9.3 Stabilité d'un système

Pour voir si un système est stable, on lui applique une perturbation (impulsion par exemple) et on observe l'évolution de $s(t)$:

- Si $s(t)$ retourne à la valeur 0, on dit que le système est stable.
- Sinon on dit que le système est instable.

1. Déterminer la stabilité du système à partir de la réponse temporelle du système dans les cas suivants lorsque le signal d'entrée est une impulsion.

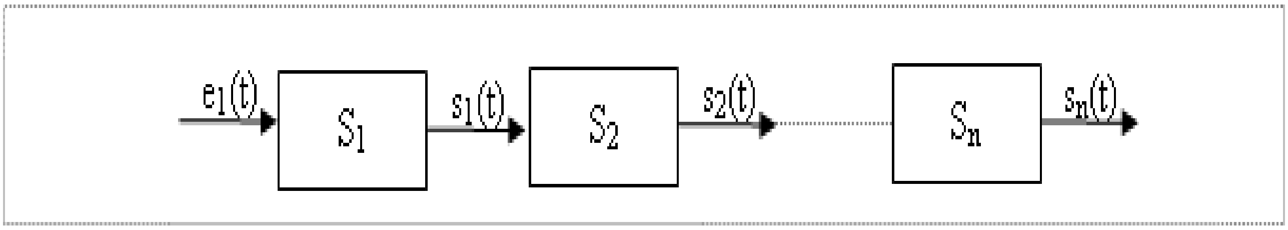
$$H_1(p) = \frac{1}{2+5p} \qquad H_2(p) = \frac{12}{5-10p} \qquad H_3(p) = \frac{10}{p(p+3)(p-2)}$$
$$H_4(p) = \frac{2}{p^2-4p+4} \qquad H_5(p) = \frac{12}{p^2-2p+2} \qquad H_6(p) = \frac{1}{(p-5)(p-4)}$$
$$H_7(p) = \frac{5p}{p^2+4p+5}$$

2. Faire apparaître dans un tableau les différents termes que l'on peut obtenir dans une décomposition en éléments simples, leur réponse temporelle, leur représentation graphique et la stabilité du système.

3. En déduire une propriété sur les pôles de $S(p)$ permettant de savoir si le système est stable ou instable.

9.4 Systèmes en cascades

On considère n systèmes en cascade comme ci-dessous, et on appelle H_i la fonction de transfert du système S_i.



Quelle est la fonction de transfert des n systèmes ?

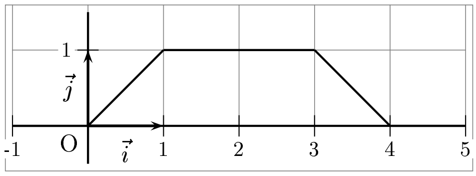
10 EXERCICES

10.1 Calcul de transformées de Laplace directes

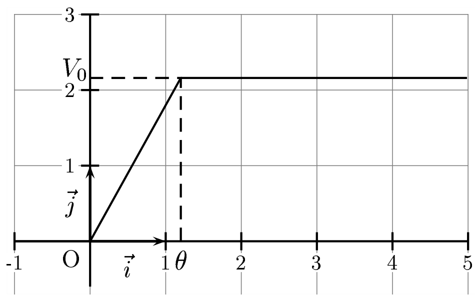
Exercice 1. 1. Linéariser en utilisant une formule trigonométrique : $f(t) = \cos^2(\omega t)$

2. En déduire, en vous aidant des propriétés classiques et du formulaire, la transformée de Laplace de $f(t) = \cos^2(\omega t)U(t)$

Exercice 2. Calculer la transformée de Laplace du signal ci-dessous :

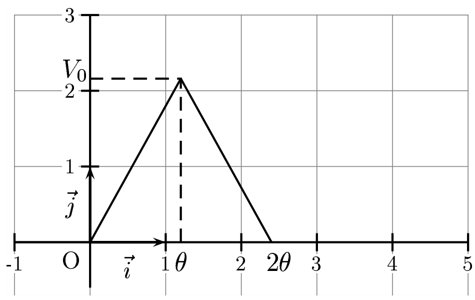


Exercice 3. Calculer, **à partir de la définition,** la transformée de Laplace du signal réel ci-dessous : ($V_0 \geqslant 0$ et $\theta \geqslant 0$)

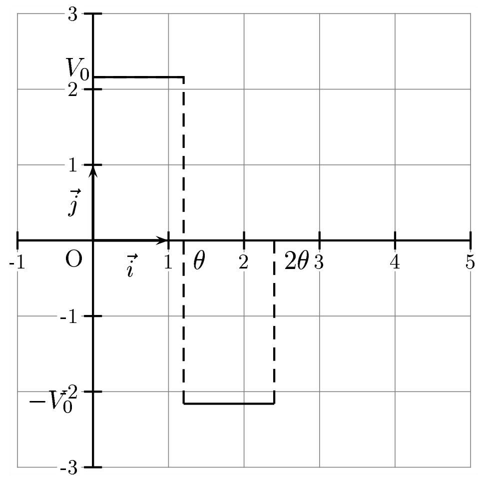


Retrouver le résultat précédent en décomposant le signal en une combinaison linéaire de signaux élémentaires et en utilisant le formulaire.

Exercice 4. Calculer la transformée de Laplace du signal suivant (méthode au choix) :



Exercice 5. Calculer la transformée de Laplace du signal suivant (méthode du formulaire) :



Exercice 6. Trouver les transformées de Laplace des signaux f_1 et $f_2$suivants et les représenter graphiquement :

$$f_1(t) = \left\{ \begin{array}{c} \sin t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 \text{ si } t > \pi \text{ ou } t < 0 \end{array} \right. ; \quad f_2(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant a \\ 0 \text{ si } t > a \text{ ou } t < 0 \end{array} \right. \quad f_3(t) = \left\{ \begin{array}{c} t^2 \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Exercice 7. Calculer les transformées de Laplace des signaux T périodiques définis ci-dessous :

1. $f(t) = |\sin t| U(t)$
2. $f(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } 0 < t < a \\ 0 \text{ si } a \leqslant t \leqslant 2a \\ T = 2a \end{array} \right.$

10.2 Calculs de transformées de Laplace inverses.

Exercice 8. Calculer $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{11p+1}{(p+1)(p^2+4)}\right)$

Exercice 9. Trouver $f(t)$ sachant que $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$

Exercice 10. Trouver $f(t)$ sachant que : $F(p) = \dfrac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}$ et représenter graphiquement $f(t)$.

Exercice 11. Trouver $f(t)$ sachant que : $F(p) = \dfrac{1}{p(p+2)^3(p+3)}$

10.3 Application de la transformée de Laplace à la résolution d'équations différentielles.

Exercice 12. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante

$$y^{(4)}(t) + 5y''(t) + 4y(t) = \sin t \text{ et } t \geqslant 0, \; y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$$

Exercice 13. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante

$$y''(t) - y'(t) + y(t) = (t-1)e^t U(t) \quad \text{et} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Exercice 14. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante

$$ty'''(t) - y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0 \ \text{ et } y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \ \text{ et } \ y'''(0) = 1.$$

10.4 Application de la transformée de Laplace à la résolution de systèmes d'équations différentielles.

Résoudre le système suivant avec f et g deux fonctions dérivables et définies sur $[0; +\infty[$.

$$\begin{cases} f' - f + 2g &= t \\ g' - f + g &= 0 \end{cases}$$

avec comme conditions initiales $f(0) = g(0) = 0$.

10.5 Application de la transformée de Laplace à la résolution d'équations intégrales.

Exercice 15. Résoudre les équations intégrales de Voltéra suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^t f(x)e^{t-x}dx = \sin t$
2. $\displaystyle f(t) + \int_0^t f(t-x)e^{-x}dx = \cos t$
3. $\displaystyle f(t) + \int_0^t f(t-x)f(x)dx = 2(2t+1)e^{2t}$
4. $\displaystyle f(t) + \int_0^t f(x)dx = t\sin t$