Calcul de Probabilités

SR

Cours 1

Définitions

- On appelle expérience aléatoire $\mathcal{E}$ une expérience dont l'issue est aléatoire.

  Jeter un dé, jouer à pile ou face, tirer des cartes dans un jeu de cartes, jouer au loto...

- On appelle univers des possibles Ω l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience

  $\mathcal{E}$: jeter un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- On appelle événement élémentaire tout élément de Ω
  $\{2\}$ est un événement élémentaire car singleton de Ω

- On appelle événement élémentaire tout élément de Ω
  $\{2\}$ est un événement élémentaire car singleton de Ω
- On appelle événement toute partie de Ω
  Obtenir un nombre pair est un événement de Ω, en effet
  $A = \{2, 4, 6\}$

Evenements particuliers

- Un singleton $\{\omega\}$ est un événement élémentaire

Evenements particuliers

- Un singleton $\{\omega\}$ est un événement élémentaire
- Ω est l'événement certain car il est toujours réalisé

Evenements particuliers

- Un singleton $\{\omega\}$ est un événement élémentaire
- Ω est l'événement certain car il est toujours réalisé
- $\emptyset$ est l'événement impossible car il n'est jamais réalisé

Autres Exemples

L'univers des possibles peut être un ensemble fini ou infini.
$\mathcal{E}$: jeter une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention d'un pile", $\Omega = \{P, FP, FFP, ...\}$, Ω est infini mais dénombrable (car on a une bijection entre $\mathbb{N}^{\times}$ avec la place du pile) A : obtenir un pile en au plus quatre lancers $A\{P, FP, FFP, FFFP\}$ est un evenement de cette expérience aléatoire

Opérations sur les évènements

Contexte pour l'exemple

Un joueur lance un dé. Nous considérons les évènements A "obtenir un nombre pair" et B "obtenir un nombre impair".

Evenement contraire

$\bar{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

Evenement contraire

$\bar{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
Exemple : $\bar{A} = B$

Evenement $A \cap B$

- $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A ET B sont réalisés simultanément.

Evenement $A \cap B$

- $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A ET B sont réalisés simultanément.
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors la réalisation simultanée de A et B est impossible, nous dirons que les évènements A et B sont incompatibles

Evenement $A \cap B$

- $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A ET B sont réalisés simultanément.
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors la réalisation simultanée de A et B est impossible, nous dirons que les évènements A et B sont incompatibles
- Plus généralement $\cap_i A_i$ est réalisé si et seulement si tous les évènements A_i sont réalisés.

Evenement $A \cap B$

- $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A ET B sont réalisés simultanément.
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors la réalisation simultanée de A et B est impossible, nous dirons que les évènements A et B sont incompatibles
- Plus généralement $\cap_i A_i$ est réalisé si et seulement si tous les évènements A_i sont réalisés.
  Exemple $A \cap B = \emptyset$

Evenement $A \cup B$

- $A \cup B$ est réalisé si et seulement si au moins un des évènements est réalisé.

Evenement $A \cup B$

- $A \cup B$ est réalisé si et seulement si au moins un des évènements est réalisé.
- Plus généralement $\cup_i A_i$ est réalisé si et seulement si au moins un des évènements A_i est réalisé.

Evenement $A \cup B$

- $A \cup B$ est réalisé si et seulement si au moins un des évènements est réalisé.
- Plus généralement $\cup_i A_i$ est réalisé si et seulement si au moins un des évènements A_i est réalisé.
  Exemple $A \cup B = \Omega$

Union Intersection

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$$

Partition de Ω

Une partition de Ω est un système complet d'événements. Autrement dit, des événements $(A_i)_i$ forment un système complet d'événements si :

- sont différents de $\emptyset$,
- deux à deux incompatibles
- et si $\cup A_i = \Omega$

Inclusion

L'événement $A \subseteq B$ signifie que la réalisation de A implique la réalisation de B.

Evenement A privé de B

$$A \backslash B = \{\omega \in A \quad \omega \notin B\}$$

Espace probabilisable

Introduction

Connaissant Ω l'univers des possibles, on cherche à attribuer une mesure à toute partie de Ω, cette mesure va être appelée mesure de probabilité, et elle doit respecter certaines règles simples de calcul.

Introduction

Connaissant Ω l'univers des possibles, on cherche à attribuer une mesure à toute partie de Ω, cette mesure va être appelée mesure de probabilité, et elle doit respecter certaines règles simples de calcul.
Or selon l'ensemble Ω considéré, certaines de ses parties sont très compliquées et e sont pas mesurables, d'où le fait que la mesure de probabilités ne va être définie directement sur Ω mais sur une tribu.

Définition : σ-Algèbre ou Tribu

Ω étant un ensemble, on appelle une σ-algèbre sur Ω une famille $\mathcal{T}$ de parties de Ω telles que :

i) $\Omega \in \mathcal{T}$

Définition : σ-Algèbre ou Tribu

Ω étant un ensemble, on appelle une σ-algèbre sur Ω une famille $\mathcal{T}$ de parties de Ω telles que :

i) $\Omega \in \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{T}$ est stable par prise du complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$

Définition : σ-Algèbre ou Tribu

Ω étant un ensemble, on appelle une σ-algèbre sur Ω une famille $\mathcal{T}$ de parties de Ω telles que :

i) $\Omega \in \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{T}$ est stable par prise du complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$

iii) $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$ alors $\cup_n A_n \in \mathcal{T}$

Espace Probabilisable

Un espace probabilisable est un couple $\Omega, \mathcal{T}$ constitué de l'univers des possibles Ω muni d'une tribu $\mathcal{T}$

Espace Probabilisable

Un espace probabilisable est un couple $\Omega, \mathcal{T}$ constitué de l'univers des possibles Ω muni d'une tribu $\mathcal{T}$
Les espaces étudiés seront tous probabilisables

Dans notre cas

Dans la modélisation des phénomènes aléatoires, lorsque Ω est un ensemble fini ou dénombrable, la tribu considérée est la tribu, notée $\mathcal{P}(\Omega)$, de toutes les parties de Ω.

Remarque

Si Ω est un ensmble fini à n éléments alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n.

Définition : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, avec Ω un espace, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :

Définition : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, avec Ω un espace, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :

i) $P(\Omega) = 1$

Définition : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, avec Ω un espace, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints :

$$P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = \sum_{1}^{+\infty} P(A_n)$$

P est dite σ-additive.

Propriétés

i) $P(\emptyset) = 0$

Propriétés

i) $P(\emptyset) = 0$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega$$

par ii)

Propriétés

i) $P(\emptyset) = 0$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega$$

par ii)

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset)$$

Propriétés

i) $P(\emptyset) = 0$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega$$

par ii)

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset)$$

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

Propriétés

i) $P(\emptyset) = 0$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega$$

par ii)

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset)$$

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

Propriétés

ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Propriétés

ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$A \cup \bar{A} = \Omega$ donc A et $\bar{A}$ sont disjoints dans $\mathcal{A}$ par *ii*)

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

donc

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Propriétés

iii) (A, B) étant une partition de Ω i.e.

$$A \cup B = \Omega$$

$$A \cap B = \emptyset$$

, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propriétés

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Propriétés

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Propriétés

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$$

Propriétés

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$
$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

Propriétés

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$
$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
comme $A \cap B \cap \bar{B} = \emptyset$, par propriété d'additivité, nous avons
$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$

Propriétés

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$
$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
comme $A \cap B \cap \bar{B} = \emptyset$, par propriété d'additivité, nous avons
$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$
De même, $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

Propriétés

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$
$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
comme $A \cap B \cap \bar{B} = \emptyset$, par propriété d'additivité, nous avons
$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$
De même, $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriétés

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

Propriétés

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

Propriétés

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

$$B = A \cup (B \backslash A)$$

Propriétés

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

$$B = A \cup (B \backslash A)$$
$$A \cap (B \backslash A) = \emptyset$$

Propriétés

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

$$B = A \cup (B \backslash A)$$
$$A \cap (B \backslash A) = \emptyset$$
$$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B - A)$$

Propriétés

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

$B = A \cup (B \backslash A)$
$A \cap (B \backslash A) = \emptyset$
$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B - A)$
Comme $P(B \backslash A) \geq 0$

Propriétés

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

$B = A \cup (B \backslash A)$
$A \cap (B \backslash A) = \emptyset$
$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B - A)$
Comme $P(B \backslash A) \geq 0$
il vient, $P(A) \leq P(B)$

Propriétés : Premier Bilan

i) $P(\emptyset) = 0$

ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

iii) (A, B) étant une partition de Ω, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

Probabilité sur un ensemble fini

Soit Ω un ensemble fini, soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
La donnée d'un ensemble $\{p(\omega)\ \omega \in \Omega\}$ vérifiant

i) $\forall \omega \in \Omega\ p(\omega) \geq 0$

ii) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Probabilité sur un ensemble fini

Soit Ω un ensemble fini, soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
La donnée d'un ensemble $\{p(\omega)\ \omega \in \Omega\}$ vérifiant

i) $\forall \omega \in \Omega\ p(\omega) \geq 0$

ii) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

va permettre de définir une une probabilité sur Ω :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Exemple : Dé truqué

On lance un dé cubique truqué dont le sfaces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité de l'événement "le résultat du lancer est i" pour $1 \leq i \leq 6$.

1) Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sachant que $p_2 = p_4$, $p_4 = p_6$, $p_1 = p_3$, $p_3 = p_5$, $p_6 = 2p_5$.
2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : -obtenir un résultat pair -obtenir un résultat impair.

Exemple

Nous savons que la somme des probabilités $p_1 + p_2 + ... + p_6 = 1$ on exprime tout en fonction de p_5, ainsi $p_5 = \frac{1}{9}$ et on en déduit les autres et nous remplaçons par les égalités

obtenir un résultat pair c'est $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{3}$

obtenir un résultat impair c'est $p_1 + p_3 + p_5 = \frac{1}{3}$

Probabilité Uniforme sur un univers Ω fini

Dans toutes les situations où aucun événement élémentaire ne doit être distingué par rapport aux autres, on suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Probabilité Uniforme sur un univers Ω fini

Dans toutes les situations où aucun événement élémentaire ne doit être distingué par rapport aux autres, on suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables.
Sur un univers fini Ω l'hypothèse d'équiprobabilité définit une probabilité P unique dite probabilité uniforme sur Ω donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Exemple

Dans le cas du lancer d'un dé non truqué, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exemple

Dans le cas du lancer d'un dé non truqué, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4, 6\}$ donc

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemple

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5, on pioche 2 boules dans l'urne, quelle est la probabilité que le premier chiffre soit impair

- si le tirage est successif sans remise ?
- si le tirage est successif avec remise ?

Exemple

$$P(A) = \frac{3 * 4}{5 * 4}$$

Exemple

$$P(A) = \frac{3 * 5}{5 * 5}$$

Exemple

On lance deux dés distincts.

Exemple

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Exemple

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Soit A l'événement : "la somme des chiffres obtenus est ≥ 10"

Exemple

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Soit A l'événement : "la somme des chiffres obtenus est ≥ 10"

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 6), (6, 5)\}$$

Exemple

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Soit A l'événement : "la somme des chiffres obtenus est ≥ 10"

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 6), (6, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1 \leq k \leq 3}(A/B_k) = 0$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1 \leq k \leq 3}(A/B_k) = 0$
Calculons $P(A/B_5) =$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1\leq k\leq 3}(A/B_k) = 0$
Calculons $P(A/B_5) = \frac{1}{3}$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1 \leq k \leq 3}(A/B_k) = 0$
Calculons $P(A/B_5) = \frac{1}{3}$
Or $P(B_5) = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B_5) = \frac{1}{18}$

Cours 2

Probabilités conditionnelles

Exemple Introductif

On lance deux dés distincts.

Exemple Introductif

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Exemple Introductif

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Soit A l'événement : "la somme des chiffres obtenus est ≥ 10"

Exemple Introductif

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Soit A l'événement : "la somme des chiffres obtenus est ≥ 10"

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 6), (6, 5)\}$$

Exemple Introductif

On lance deux dés distincts.
L'univers des possibles Ω correspond à un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}^2$$

$$card(\Omega) = 36$$

Soit A l'événement : "la somme des chiffres obtenus est ≥ 10"

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 6), (6, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1 \leq k \leq 3}(A/B_k) = 0$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1 \leq k \leq 3}(A/B_k) = 0$
Calculons $P(A/B_5) =$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1\leq k\leq 3}(A/B_k) = 0$
Calculons $P(A/B_5) = \frac{1}{3}$

Exemple

Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Si B_1, B_2 ou B_3 alors A ne peut pas se réaliser
$P_{1 \leq k \leq 3}(A/B_k) = 0$
Calculons $P(A/B_5) = \frac{1}{3}$
Or $P(B_5) = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B_5) = \frac{1}{18}$

Probabilité conditionnelle : Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Si $P(B) > 0$, alors

$$P(./B) : A \mapsto P(A/B)$$

avec

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ceci est la probabilité de A sachant B.

Exemple

Démontrer que la formule précédente définit bien une probabilité sur l'espace Ω.

Démonstration

- $$P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Démonstration

- $$P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$
- Si $\forall i, j \in \mathbb{N}, A_i, A_j \in \mathcal{A} \quad A_i \cap A_j = \emptyset$ alors,

$$P(\cup_i A_i/B) = \frac{P((\cup_i A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_i (A_i \cap B))}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_i P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_i \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_i P(A_i/B)$$

Formule des Probabilités composées

Si A et B sont deux évènements de Ω tels que $P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

Formule des Probabilités composées

Si A et B sont deux évènements de Ω tels que $P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

Généralisation de la formule : si A_1, A_2,...,A_n désignent n évènements de probabilités non nulles alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Démonstration

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

Démonstration

Raisonnons par récurrence : pour $n = 2$,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2)$$

Démonstration

Raisonnons par récurrence : pour $n = 2$,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2)$$

Supposons que cela soit vrai au rang $n - 1$

Démonstration

Raisonnons par récurrence : pour $n = 2$,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2)$$

Supposons que cela soit vrai au rang $n - 1$
$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_n \cap (A_1 \cap A_2 \cap ...A_{n-1}))$

Démonstration

Raisonnons par récurrence : pour $n = 2$,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2)$$

Supposons que cela soit vrai au rang $n-1$
$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_n \cap (A_1 \cap A_2 \cap ... A_{n-1}))$
$= P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$

Démonstration

Raisonnons par récurrence : pour $n = 2$,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2)$$

Supposons que cela soit vrai au rang $n-1$

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_n \cap (A_1 \cap A_2 \cap ...A_{n-1}))$
$= P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$
$= P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$

Exemple

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire, et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

Exemple

On note Bi l'événement "La i-ème boule tirée est blanche". La probabilité recherchée est :
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_3/B_1 \cap B_2) * P(B_2/B_1) * P(B_1)$

Exemple

On note Bi l'événement "La i-ème boule tirée est blanche". La probabilité recherchée est :
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_3/B_1 \cap B_2) * P(B_2/B_1) * P(B_1)$
Clairement $P(B_1) = \frac{1}{10}$

Exemple

On note Bi l'événement "La i-ème boule tirée est blanche". La probabilité recherchée est :
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_3/B_1 \cap B_2) * P(B_2/B_1) * P(B_1)$
Clairement $P(B_1) = \frac{1}{10}$
Maintenant, si B1 est réalisé, avant le 2ème tirage, l'urne est constituée de 8 boules noires et 2 blanches. On a donc :
$P(B_2/B_1) = \frac{2}{10}$

Exemple

On note Bi l'événement "La i-ème boule tirée est blanche". La probabilité recherchée est :
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_3/B_1 \cap B_2) * P(B_2/B_1) * P(B_1)$
Clairement $P(B_1) = \frac{1}{10}$
Maintenant, si B1 est réalisé, avant le 2ème tirage, l'urne est constituée de 8 boules noires et 2 blanches. On a donc :
$P(B_2/B_1) = \frac{2}{10}$
Si B1 et B2 sont réalisés, avant le 3è tirage, l'urne est constituée de 9 boules noires et 1 blanche. On en déduit
Finalement : $P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{1}{10}$

Exemple

On note Bi l'événement "La i-ème boule tirée est blanche". La probabilité recherchée est :
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_3/B_1 \cap B_2) * P(B_2/B_1) * P(B_1)$
Clairement $P(B_1) = \frac{1}{10}$
Maintenant, si B1 est réalisé, avant le 2ème tirage, l'urne est constituée de 8 boules noires et 2 blanches. On a donc :
$P(B_2/B_1) = \frac{2}{10}$
Si B1 et B2 sont réalisés, avant le 3è tirage, l'urne est constituée de 9 boules noires et 1 blanche. On en déduit
Finalement : $P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{1}{10}$
$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \frac{6}{1000} = \frac{3}{500}$

Formule des probabilités totales

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace probabilisé, $0 < P(A) < 1$, alors :

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$$

Formule des probabilités totales

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace probabilisé, $0 < P(A) < 1$, alors :

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$$

Plus généralement, si $(A_n)_n$ désigne une partition dénombrable de Ω, telle que $n \geq 1$ $0 < P(A_n) < 1$ alors

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P(B/A_n)$$

Exemple

Démontrer la formule précédente.

Démonstration de la formule des probabilités composées

$$B = B \cap \Omega =$$

Démonstration de la formule des probabilités composées

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A})$$

$$B = B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

Démonstration de la formule des probabilités composées

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A})$$

$$B = B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$$

Démonstration de la formule des probabilités composées

$$B = B \cap \Omega =$$

Démonstration de la formule des probabilités composées

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

Démonstration de la formule des probabilités composées

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \right)$$

$$B = \cup_{n=1}^{+\infty} (B \cap A_n)$$

Démonstration de la formule des probabilités composées

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

$$B = \cup_{n=1}^{+\infty}(B \cap A_n)$$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B/A_n)P(A_n)$$

Exemple

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exemple

On note B l'événement "on obtient une boule blanche" et A_i l'événement "on tire la boule dans l'urne U_i". $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme un système complet d'événements, et :

Exemple

On note B l'événement "on obtient une boule blanche" et A_i l'événement "on tire la boule dans l'urne U_i". $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme un système complet d'événements, et :
$P(B) =)P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3)$

Exemple

On note B l'événement "on obtient une boule blanche" et A_i l'événement "on tire la boule dans l'urne U_i". $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme un système complet d'événements, et :

$P(B) =)P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3)$

$P(B) = \frac{1}{10} * \frac{1}{3} + \frac{2}{10} * \frac{1}{3} + \frac{6}{10} * \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$

Formule de Bayes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$, alors

Formule de Bayes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})}$$

Formule de Bayes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})}$$

Plus généralement, si $(A_n)_n$ désigne une partition dénombrable de Ω et si $\forall n \; 0 < P(A_n) < 1$ et $P(B) > 0$, alors $\forall k \geq 1$:

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P(B/A_n)}$$

Exemple

Une maladie affecte une personne sur 1000. Un test sanguin detecte la maladie avec une fiabilité de 0.99 quand la maladie est effectivement présente, et nous obtenons un faux positif pour 0.2% des persones testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade quand le test est positif ?

Exemple

E : personnes malades,
$P(E) = 10^{-3}$
T : personnes ayant un test positif
$P(T/E) = 0.99$, $P(T/\bar{E}) = 2.10^{-3}$

Exemple

$$P(E/T) = \frac{P(T/E)P(E)}{P(T/E)P(E) + P(T/\bar{E})P(\bar{E})}$$

Exemple

$$P(E/T) = \frac{P(T/E)P(E)}{P(T/E)P(E) + P(T/\bar{E})P(\bar{E})}$$

$$P(E/T) = \frac{10^{-3} * 0.99}{10^{-3} * 0.99 + 2 * 10^{-3} * (0.999)}$$

Exemple

$$P(E/T) = \frac{P(T/E)P(E)}{P(T/E)P(E) + P(T/\bar{E})P(\bar{E})}$$

$$P(E/T) = \frac{10^{-3} * 0.99}{10^{-3} * 0.99 + 2 * 10^{-3} * (0.999)}$$

$$P(E/T) \simeq 0.33$$

Indépendance de deux évènements

Soient $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, on dit que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Il ne faut pas confondre la notion d'indépendance qui porte sur les probabilités et la notion d'ensembles disjoints ou incompatibles i.e. $A \cap B = \emptyset$

Remarque

- Si A et B sont indépendants, avec $P(B) > 0$ alors $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

Remarque

- Si A et B sont indépendants, avec $P(B) > 0$ alors
  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

- Si A et B sont indépendants, alors
  $\bar{A}$ et B
  A et $\bar{B}$
  $\bar{A}$ et $\bar{B}$
  sont indépendants.

Démo

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \bar{\cup} B) = 1 - P(A \cap B) =$$
$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$
$$(1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{(}A))P(\bar{(}B))$$

Evenements Indépendants

Soit $(A_n)_n$ une partition dénombrable de $\mathcal{A}$

$(A_n)_n$ sont deux à deux indépendants si et seulement si $\forall i \geq 1 \; \forall j \geq 1$ distinct,

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Evenements Indépendants

Soit $(A_n)_n$ une partition dénombrable de $\mathcal{A}$

$(A_n)_n$ sont deux à deux indépendants si et seulement si
$\forall i \geq 1 \ \forall j \geq 1$ distinct,

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$(A_n)_n$ sont mutuellement indépendants si et seulement si
$\forall k \geq 2$ et pour toute suite $(A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k})$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$$

Exemples

1. Pour trois évènements A, B, C expliciter les conditions de l'indépendance deux à deux puis de l'indépendance mutuelle.
2. Déterminer le nombre de conditions requises par l'indépendance deux à deux, puis par l'indépendance mutuelle pour une famille d en évènements.
3. En déduire quelle propriété est la plus contraignante.

Evenements indépendants

$$(A, B, C)$$

sont deux à deux indépendants si et seulement si

Evenements indépendants

$$(A, B, C)$$

sont deux à deux indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Evenements indépendants

$$(A, B, C)$$

sont mutuellement indépendants si et seulement si

Evenements indépendants

$$(A, B, C)$$

sont mutuellement indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Evenements Indépendants

$$(A_1, A_2, ..., A_n)$$

sont dits deux à deux indépendants si et seulement si

Evenements Indépendants

$$(A_1, A_2, ..., A_n)$$

sont dits deux à deux indépendants si et seulement si

$$\forall i, j \; P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Evenements Indépendants

$$(A_1, A_2, ..., A_n)$$

sont dits deux à deux indépendants si et seulement si

$$\forall i, j \; P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Cela requiert $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ conditions par le choix de deux indices $(i, j) = (j, i)$ parmi n

Exemples

$$(A_1, A_2, ..., A_n)$$

sont mutuellement independants si et seulement si

Exemples

$$(A_1, A_2, ..., A_n)$$

sont mutuellement independants si et seulement si

$$\forall k \geq 2 \ (A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}) \ P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})...P(A_{i_k})$$

Exemples

$$(A_1, A_2, ..., A_n)$$

sont mutuellement independants si et seulement si

$$\forall k \geq 2 \ (A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}) \ P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})...P(A_{i_k})$$

Cela requiert $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{k} + ... + \binom{n}{n}$ conditions

Exemples

$$(A_1, A_2, ..., A_n)$$

sont mutuellement independants si et seulement si

$$\forall k \geq 2 \ (A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}) \ P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})...P(A_{i_k})$$

Cela requiert $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{k} + ... + \binom{n}{n}$ conditions

Cela requiert $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - 1 - n$ conditions

3 Exemple

Un joueur lance deux dés.
A : "Le premier dé donne 4"
B : "Le deuxième dé donne 6"
C : "La somme des chiffres obtenus est paire"
Qu'en est il de l'indépendance de ces évènements ?

Exemple

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = \frac{1}{6}$$
$$P(C = \frac{1}{2}$$
$$P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$P(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B)P(C)$$

Exemple

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{1}{6}$
$P(C = \frac{1}{2}$
$P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
$P(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$
$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B)P(C)$
Ils sont deux à deux indépendnats mais ne sont pas mutuellement indépendants.