Couple de Vecteurs Aléatoires

SR

1. Couple de variables aléatoires discrets
   - Loi conjointe, lois marginales
   - Espérance d'un vad
   - Indépendance de vad
   - Opérations sur les variables aléatoires discrètes
   - Covariance, Corrélation et Indépendance

2. Couple de vecteurs aléatoires réels
   - Loi conjointe, lois marginales
   - Espérance, Covariance
   - Fonction de répartition
   - Caractérisation de l'Indépendance
   - Théorème de transformation

Loi de Probabilité d'un vecteur

Dans ce cours, $Z = (X, Y)$ désigne un couple de variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω :

$$X(\Omega) = \{x_1, ..., x_q\}$$

$$Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$$

alors loi de probabilité associée du couple est définie par

$$p_{ij} = P(Z = (x_i, y_j)) = P((X, Y) = (x_i, y_j))$$

$$p_{ij} = P((X = x_i) \,\mathrm{et}\, (Y = y_j))$$

il est commode de reporter ces valeurs dans un tableau.

Remarque

Á partir de la loi du couple, nous pouvons retrouver les lois de X et de Y par :

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j=1}^{p} p_{ij}$$

$$P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_{i=1}^{q} p_{ij}$$

La loi p_Z est appelée loi conjointe du vecteur Z (car c'est la loi de toutes les coordonnées), tandis que chacune des lois p_X et p_Y des coordonnées de X et Y de Z sont appelées lois marginales.

Exemple

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On extrait successivement sans remise deux boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, 0 sinon. Et soit Y la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, 0 sinon. Déterminer la loi conjointe du couple et ses lois marginales.

Exemple

$$(X, Y)(\Omega) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

Exemple

X Y	0	1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Exemple

$$p(X=0)=p(X=0,Y=0)+p(X=0,Y=1)=\frac{4}{7}$$

$$p(X=1)=p(X=1,Y=0)+p(X=1,Y=1)=\frac{3}{7}$$

$$p(Y=0)=p(X=0,Y=0)+p(X=1,Y=0)=\frac{4}{7}$$

$$p(Y=1)=p(X=0,Y=1)+p(X=1,Y=1)=\frac{3}{7}$$

Esperance d'un vecteur aléatoire

On dit que Z est intégrable si chacune de ses coordonnées est intégrable. L'espérance de Z est alors donnée par :

$$E(Z) = (E(X), E(Y))$$

C'est le vecteur des espérances.

Exemple

Caluler le vecteur des espérances sur notre exemple.

Exemple

Caluler le vecteur des espérances sur notre exemple.

$$(E(X), E(Y)) = (\frac{3}{7}, \frac{3}{7})$$

Définition de l'indépendance de deux vad

Les vad X et Y sont indépendantes ssi les évènements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ le sont pour tout i et j, c'est-à-dire

$$\forall i \quad \forall j \quad p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$$

Exemples

- Un joueur lance simultanément deux dés, soit X la variable aléatoire indiquant le résultat du premier dé et soit Y la variable aléatoire indiquant le résultat du deuxième. X et Y sont elles indépendantes ?
- Même question si X désigne la somme des dés et Y leur produit.

Exemple

- Dans le premier cas, nous avons

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = \frac{1}{36} = P(X = i) * P(Y = j) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6}$$

pout $1 \leq i \leq 6 \quad 1 \leq j \leq 6$. Donc X et Y sont bien indépendantes.

- Dans le deuxième cas,

$$P(X = 8) = \frac{5}{36} \quad P(Y = 15) = \frac{1}{18}$$

$$P((X = 8) \text{ et } (Y = 15)) = \frac{1}{18}$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes

Opérations sur les variables aléatoires : Addition ou produit par un nombre

Si X est une variable aléatoire définie sur $\Omega, P)$ et a et λ des réels.
Les variables aléatoires $X + a$ et λX sont définies sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega \ (X + a)(\omega) = X(\omega) + a \quad (\lambda X)(\omega) = \lambda X(\omega)$$

Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_q\}$ est l'univers image de X alors,
$(X + a)(\Omega) = \{x_1 + a, x_2 + a, ..., x_q + a\}$
$(\lambda X)(\Omega) = \{\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_q\}$
et

$$P(X + a = x_i + a) = P(X = x_i) = P(\lambda X = \lambda x_i)$$

Exemple

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.2$, déterminer la loi de $3X$.

Exemple

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.2$, déterminer la loi de $3X$.

$$(3X)(\Omega) = \{0, 3\} \quad P(3X = 0) = P(X = 0) = 0.8$$

$$P(3X = 3) = P(X = 1) = 0.2$$

Opérations sur les variables aléatoires : Somme

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini (Ω, P)
La somme $Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

L'univers image de $Z = X + Y$ est constitué par les réels z_k du type $z_k = x_i + y_j$ Et on a $P(Z = z_k) = \sum p_{ij}$, la somme étant étendue à tous les couples (i, j) tels que $z_k = x_i + y_j$

Exemple

Déterminer la loi de $S = X + Y$ dans l'exemple 1.

Exemple

Déterminer la loi de $S = X + Y$ dans l'exemple 1.

$$S(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

Exemple

Déterminer la loi de $S = X + Y$ dans l'exemple 1.

$$S(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(S = 0) = \frac{2}{7} \quad P(S = 1) = \frac{4}{7} \quad P(S = 2) = \frac{1}{7}$$

Exemple

Si X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs μ et ν, déterminer la loi de $X + Y$ en supposant X et Y indépendantes.

Exemple

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

Via les probas totales on a

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{P(X+Y=k/X=i)P(X=i)}_{P(Y=k-i/X=i)\,P(X=i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P((Y=k-i \boxed{\text{et}} X=\overset{i}{\cancel{k}}))$$

or X et Y sont indépendantes d'où cqfd.

$$= \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i)P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\sigma}\sigma^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{i}}{i!}$$

$$" \frac{e^{-(\mu+\sigma)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!\,\sigma^{k-i}\mu^{i}}{(k-i)!\,i!}$$

Exemple

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}\frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^{i}\mu^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^{i}\mu^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^{k}$$

via la formule du binôme de Newton

$X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$
$X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Opérations sur les variables aléatoires : Produit

La variable aléatoire produit XY est la variable aléatoire définie sur Ω par

$$\forall\omega \in \Omega \quad (XY)(\Omega) = X(\Omega)Y(\Omega)$$

L'univers image de $T = XY$ est constitué par les réels t_k du type $t_k = x_i y_j$ et on a $P(T = t_k) = \sum p_{ij}$, la somme étant étendue à tous les couples (i, j) tels que $t_k = x_i y_j$

Exemple

En reprenant l'exemple 1, déterminer la loi du produit $T = XY$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$
$Y(\Omega) = \{0, 1\}$

$(XY)(\Omega) = \{0, 1\}$

$P(XY = 0) = P(X=0 \text{ ET } Y=0) +$
$P(X=0 \text{ ET } Y=1)$
$+ P(X=1 \text{ ET } Y=0) = 6/7$

$P(XY = 1) = P(X=1 \text{ ET } Y=1) = 1/7$

Exemple

En reprenant l'exemple 1, déterminer la loi du produit $T = XY$.

$$T(\Omega) = \{0, 1\}$$

Exemple

En reprenant l'exemple 1, déterminer la loi du produit $T = XY$.

$$T(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$P(T = 0) = \frac{6}{7}$$

Exemple

En reprenant l'exemple 1, déterminer la loi du produit $T = XY$.

$$T(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$P(T = 0) = \frac{6}{7}$$

$$P(T = 1) = \frac{1}{7}$$

$E(XY)$
$= 1 \times \frac{1}{7}$

NB : $\mathrm{Covar}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/7 - 3/7 \cdot 3/7 = \frac{7-9}{49} = \frac{-2}{49}$

Matrice de covariance

De plus si Z est de carré intégrable (i.e chacune de ses composantes l'est) , la matrice de covariance est donnée par :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Var(X) & Covar(X,Y) \\ Covar(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$

avec

$$Covar(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

(La matrice de variance est une matrice symétrique.)

$= E\left(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y) \right)$

$Covar(X,X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$\boxed{Covar(X,Y) = E(XY) - E(Y)E(X)} \cancel{- E(Y)E(X) + E(X)E(Y)}$

Covariance : expression simplifiée

La covariance de X et Y a pour expression simplifiée :

$$Covar(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Preuve de l'expression simplifiée

$$Covar(X,Y) = E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

en utlisant la linéarité de l'espérance, donc

$$Covar(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Exemple

Déterminons la matrice de covariance de notre exemple :

$$\Gamma_{1,1} = Var(X) = \frac{12}{49} \quad = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) = 3/7$$

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{7} - \frac{9}{49} = \frac{-2}{49}$$

$$\Gamma_{2,1} = \frac{-2}{49}$$

$$\Gamma_{1,1} = var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3/7 - (3/7)^2 = 3/7 - \frac{9}{49} = 12/49$$

$$\Gamma_{2,2} = Var(Y) = \frac{12}{49}$$

$$\boxed{\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{12}{49} & \frac{-2}{49} \\ \frac{-2}{49} & \frac{12}{49} \end{bmatrix}}$$

Variance et Covariance

- $$Covar(X, X) = Var(X)$$
- $$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Covar(X, Y)$$
- $$Covar(X, Y) = \frac{Var(X + Y) - Var(X) - Var(Y)}{2}$$
- (La Covariance est une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée est la variance)

Preuve

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$ 1er Koenig

$$= E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)+E(Y))^2$$ linéarité

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \left((E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2 \right)$$

$$= Var X + Var Y + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

$$= Var X + Var Y + 2 Cov(X,Y)$$

Preuve

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

Preuve

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)$$

Preuve

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

Preuve

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

Variables aléatoires non corrélées

X et Y sont dites non corrélées si

$$Covar(X, Y) = 0$$

Indépendance et Corrélation

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$Covar(X, Y) = 0$$

indépendance
$\not\Downarrow$
non corrélat°

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Attention, ces relations peuvent être vérifiées sans que X et Y ne soient indépendantes.

Contre-exemple

On tire au hasard un point dans le plan de coordonnées (X, Y) avec
X et Y qui sont des variables aléatoires.
On suppose qu'on a le choix équiprobable entre les points $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ $(0,-1)$.
Montrer que X et Y sont non corrélées quoique non indépendantes.

$X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ $\quad E(X) = (-1)\times\frac{1}{4} + 0\times\ldots + 1\times\frac{1}{4} = 0$

$Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ $\quad E(Y) = (-1)\times\frac{1}{4} + 0\times\ldots + 1\times\frac{1}{4} = 0$

$XY(\Omega) = \{ 0 \}$ $\quad E(XY) = 0$

$\mathrm{covar}(X,Y) = 0$

Exemple

Ici

$$XY = 0$$

Exemple

Ici

$$XY = 0$$

$$E(X) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Exemple

Ici

$$XY = 0$$

$$E(X) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$E(Y) = 0$$

Exemple

Ici

$$XY = 0$$

$$E(X) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$E(Y) = 0$$

donc les vad sont bien non corrélées

Exemple

$$P((X = 1 \cap Y = 1)) = 0$$

$$P(X = 1) = 0.25$$

$$P(Y = 1) = 0.25$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Inégalité de Schwartz

$\sigma(X) = \sqrt{Var X}$
$\sigma(Y) = \sqrt{Var Y}$

$$|Covar(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Preuve

Nous avons pour λ réel d'une part $g(\lambda) = Var(\lambda X + Y) \geq 0$ car une variance est toujours positive

$g(\lambda) = var(\lambda X) + Var(Y) + 2\,Covar(\lambda X, Y)$

$= \underbrace{\lambda^2 var(X) + 2\lambda\, Covar(X,Y) + var(Y)}$

ceci c'est 1 trinôme du 2nd degré en λ

& g est de signe constant

$\Rightarrow \Delta < 0$

$\Rightarrow (2\,Covar(X,Y))^2 - 4\,Var(X)Var(Y) < 0$

$\Rightarrow |Covar(X,Y)| \leq \sqrt{Var X}\sqrt{Var Y}$

$Covar(\lambda X, Y) = E(\lambda XY) - E(\lambda X)E(Y) = \lambda E(XY) - \lambda E(X)E(Y)$

Preuve

Nous avons pour λ réel d'une part $g(\lambda) = Var(\lambda X + Y) \geq 0$ car une variance est toujours positive

En effet, $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

Preuve

Nous avons pour λ réel d'une part $g(\lambda) = Var(\lambda X + Y) \geq 0$ car une variance est toujours positive
En effet, $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$
et d'autre part
$g(\lambda) = \lambda^2 Var(X) + 2\lambda Covar(X, Y) + Var(Y) \quad \forall\lambda\, g(\lambda) \geq 0$

Preuve

Nous avons pour λ réel d'une part $g(\lambda) = Var(\lambda X + Y) \geq 0$ car une variance est toujours positive
En effet, $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$
et d'autre part
$g(\lambda) = \lambda^2 Var(X) + 2\lambda Covar(X, Y) + Var(Y) \quad \forall \lambda \, g(\lambda) \geq 0$
il s'agit d'un trinôme du second degré en λ qui est toujours positif ou nul donc comme $Var(X) \geq 0$ son discriminant est négatif ou nul : à savoir $4Covar(X, Y)^2 - 4Var(X)Var(Y) \leq 0 \Leftrightarrow |Covar(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$

Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation

$$\boxed{r = \frac{Covar(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$$

- il est tjs compris entre -1 et 1
- plus il est proche des extrêmes plus les va sont corrélées.

Remarques et Interprétations

1. Si les va X et Y sont indépendantes alors $r = 0$.
2. Deux variables indépendantes sont non corrélées mais la réciproque est fausse.
3. Le coefficient de corrélation linéaire mesure la dépendance affine entre X et Y : ainsi si $|r| = 1$ alors il existe des constantes a et b telles que $\boxed{Y = aX + b}$. Démontrer cette propriété.

Preuve

$|Covar(X,Y)| = \sigma(X)\sigma(Y)$

Si $|r| = 1$ alors $(Covar(X,Y))^2 = Var(X)Var(Y)$ donc $\boxed{\Delta = 0}$

Preuve

Si $|r| = 1$ alors $(Covar(X, Y))^2 = Var(X)Var(Y)$ donc$\Delta = 0$
ainsi $g(\lambda) = \underbrace{Var(X)}(\lambda - \lambda_0)^2$

$\left(a(x-x_0)^2 \right)$
(présence d'1 racine dbl)

Preuve

Si $|r| = 1$ alors $(Covar(X, Y))^2 = Var(X)Var(Y)$ donc$\Delta = 0$
ainsi $g(\lambda) = Var(X)(\lambda - \lambda_0)^2$
en particulier $g(\lambda_0) = 0$

Preuve

Si $|r| = 1$ alors $(Covar(X,Y))^2 = Var(X)Var(Y)$ donc$\Delta = 0$
ainsi $g(\lambda) = Var(X)(\lambda - \lambda_0)^2$
en particulier $g(\lambda_0) = 0$
donc $Var(\lambda_0 X + Y) = E[((\lambda_0 X + Y - E((\lambda_0 X + Y))^2] = 0$

Preuve

Si $|r| = 1$ alors $(Covar(X, Y))^2 = Var(X)Var(Y)$ donc$\Delta = 0$
ainsi $g(\lambda) = Var(X)(\lambda - \lambda_0)^2$
en particulier $g(\lambda_0) = 0$
donc $Var(\lambda_0 X + Y) = E[((\lambda_0 X + Y - E((\lambda_0 X + Y))^2] = 0$
donc $(\lambda_0 X + Y - E((\lambda_0 X + Y)) = 0$

Preuve

Si $|r| = 1$ alors $(Covar(X,Y))^2 = Var(X)Var(Y)$ donc$\Delta = 0$

ainsi $g(\lambda) = Var(X)(\lambda - \lambda_0)^2$

en particulier $g(\lambda_0) = 0$

donc $Var(\lambda_0 X + Y) = E[((\lambda_0 X + Y) - E((\lambda_0 X + Y))^2] = 0$

donc $(\lambda_0 X + Y - E((\lambda_0 X + Y)) = 0$

$\boxed{Y = -\lambda_0 X + E(\lambda_0 X + Y)}$

(par déf)

car $g(\lambda_0)$ $=$ 0

$Z = \lambda_0 X + Y$

$E((Z - E(Z))^2) = 0$

$\Rightarrow (Z - E(Z))^2 = 0$

Densité de Probabilité d'un Vecteur aléatoire continu

$Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que Z est absolument continu (ce qui veut dire que la loi p_Z est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.)

Sa densité de probabilité est une fonction positive f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, intégrable vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dxdy = 1$$

Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}^2$, nous avons :

$$P(Z \in O) = \int_O \int f(x, y) dxdy$$

Remarque

En particulier $\forall a \in \mathbb{R} \, \forall b \in \mathbb{R} \; a < b$, nous avons :

$$P((X,Y) \in]a,b[\times]c,d[) = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \right) dx$$

Exemple

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x, y) = axy^2 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{sinon}$$

Déterminer la constante a.

Exemple

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{y=1} axy^2 dy\right)dx = 1$$

Exemple

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x}^{y=1} axy^2 dy \right) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow a \int_{x=0}^{1} \frac{x}{3} - \frac{x^4}{3} dx = 1$$

Exemple

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{y=1} axy^2 dy\right)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow a\int_{x=0}^{1} \frac{x}{3} - \frac{x^4}{3} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15}\right) = 1$$

Exemple

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x}^{y=1} axy^2 dy \right) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow a \int_{x=0}^{1} \frac{x}{3} - \frac{x^4}{3} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 10$$

Exemple

(X, Y) suit la loi Uniforme sur $]a, b[\times]c, d[$ si sa densité de probabilités est :

$$f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \quad a < x < b \quad c < y < d \quad f(x, y) = 0 \,\mathrm{sin}$$

. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilités.

Généralisation

Lois marginales

Les lois marginales de X et Y sont définies respectivement par :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$$

Exemple

Déterminer la densité de X et de Y dans l'exemple précédent.

Exemple

$$f_X(x) = \int_{y=x}^{1} 10xy^2 dy = \frac{10}{3}(1 - x^3)$$

Exemple

$$f_X(x) = \int_{y=x}^{1} 10xy^2 dy = \frac{10}{3}(1 - x^3)$$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{y} 10xy^2 dx = 5y^4$$

Espérance

Le vecteur aléatoire $Z = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ possède la densité f si pour toute fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ bornée, on a :

$$E(g(X, Y)) = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) dxdy$$

en particulier

$$E(XY) = \int\int_{\mathbb{R}^2} xy) f(x, y) dxdy$$

Exemple

Déterminer dans l'exemple précédent $E(XY)$

Exemple

Déterminer dans l'exemple précédent $E(XY)$
$E((XY) = \int\int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy = \frac{10}{21}$

Covariance

La covariance a aussi pour expression simplifiée

$$Covar(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Fonction de répartition

La fonction de répartition du couple Z est donnée par :

$$\forall a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$F_Z(a) = P(X \leq a_1, Y \leq a_2) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} f(x, y) dx dy$$

Caractérisation de l'Indépendance

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si elles vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

Caractérisation de l'Indépendance

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si elles vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

- Si $Z = (X, Y)$, pour tout $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
  $f_Z(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

Caractérisation de l'Indépendance

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si elles vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

- Si $Z = (X, Y)$, pour tout $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f_Z(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$
- $\forall a \in \mathbb{R}^2$ $a = (a_1 a_2)$ $F_Z(a) = F_X(a_1) * F_Y(a_2)$

Caractérisation de l'Indépendance

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si elles vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

- Si $Z = (X, Y)$, pour tout $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f_Z(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$
- $\forall a \in \mathbb{R}^2$ $a = (a_1 a_2)$ $F_Z(a) = F_X(a_1) * F_Y(a_2)$
- Pour toutes fonctions mesurables positives ou bornées h_1, h_2 $E(h_1(X)h_2(Y)) = E(h_1(X))E(h_2(Y))$

Théorème de transformation

Si $W = h(Z)$ on veut obtenir la densité de probabilité de W en fonction de Z

Théorème de transformation

Si $W = h(Z)$ on veut obtenir la densité de probabilité de W en fonction de Z
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et soit Z une v.a.c à valeurs dans U de densité f_Z. Soit h une fonction mesurable définie sur U à valeurs dans V

Théorème de transformation

On suppose que ϕ est un difféomorphisme de S dans T, on suppose également que son Jacobien ne s'annule pas sur S. Alors $\forall (u,v) \in T$

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(h^{-1}(u,v))|J_{h^{-1}}(u,v)|1_{Imh}(u,v)$$

Si $h = (h_1, h_2)$ on a

$$J_{h^{-1}}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit (X, Y) un couple aléatoie sur $\mathbb{R}^2$ absolument continu de densite $f_{(X,Y)}$ Déterminer la densité du couple $(U, V) = (X + Y, Y)$ puis en déduire la densité marginale de $U = X + Y$ dans le cas où X et Y sont indépendantes.

Exemple

Considérons l'application $\phi(x, y) = (x + y, y)$ qui est un C^1-difféomorphisme : $\phi^{-1}(u, v) = (u - v, v)$ alors
$J_{\phi^{-1}}(u, v) = 1$
$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}(h^{-1}(u, v))|J_{h^{-1}}(u, v)|1_{Imh}(u, v) =$
$f_{(X,Y)}(u - v, v)1_{\mathbb{R}^2}(u, v)$

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(u - v, v)dv = \int_{\mathbb{R}} f_X(u - v)f_Y(v)dv$$

Cela correspo,d au produit de convolution.