Dénombrement

SR

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Ensembles finis

Définition : Ensembles équipotents

Un ensemble E est dit équipotent à un ensemble F s'il existe une bijection de E dans F.

Définition : Ensembles équipotents

Un ensemble E est dit équipotent à un ensemble F s'il existe une bijection de E dans F.

La relation "être équipotent à " est une relation d'équivalence

Définition : Ensembles finis

Un ensemble E est dit fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit équipotent à $F_n = \{1, 2, ..., n\} \quad n \in \mathbb{N}^{\times}$ et $F_0 = \emptyset$

Définition : Ensembles finis

Un ensemble E est dit fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit équipotent à $F_n = \{1, 2, ..., n\} \quad n \in \mathbb{N}^{\times}$ et $F_0 = \emptyset$

Si E est un ensemble fini, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ unique tel que E soit équipotent à F_n, n s'appelle le cardinal de E et est noté $Card(E)$.

Exemples

$card(\emptyset) =$

Exemples

$$card(\emptyset) = 0$$

Exemples

$$card(\emptyset) = 0$$
$$card(\{2\}) =$$

Exemples

$$card(\emptyset) = 0$$
$$card(\{2\}) = 1$$

Exemples

$$card(\emptyset) = 0$$
$$card(\{2\}) = 1$$
$$card(\{3, 6, 9\}) =$$

Exemples

$$card(\emptyset) = 0$$
$$card(\{2\}) = 1$$
$$card(\{3, 6, 9\}) = 3$$

Propriétés des cardinaux (Rappels)

Soient E et F deux ensembles finis, alors :

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

Propriétés des cardinaux (Rappels)

Soient E et F deux ensembles finis, alors :

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Définitions

Soient E et F deux ensembles finis,

- Une application f de E dans F associe à tout élément de E un élément et un seul dans F, appelé image

Définitions

Soient E et F deux ensembles finis,

- Une application f de E dans F associe à tout élément de E un élément et un seul dans F, appelé image
- f est injective ssi tout élément de F admet au plus un antécédent dans E

Définitions

Soient E et F deux ensembles finis,

- Une application f de E dans F associe à tout élément de E un élément et un seul dans F, appelé image
- f est injective ssi tout élément de F admet au plus un antécédant dans E
- f est surjective ssi tout élément de F admet au moins un antécédant dans E

Définitions

Soient E et F deux ensembles finis,

- Une application f de E dans F associe à tout élément de E un élément et un seul dans F, appelé image
- f est injective ssi tout élément de F admet au plus un antécédant dans E
- f est surjective ssi tout élément de F admet au moins un antécédant dans E
- f est bijective ssi elle est à la fois injective et surjective

Nombre d'applications de E dans F : exemple

Considérons $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ nous cherchons à déterminer le nombre d'applications de E dans F.

Nombre d'applications de E dans F : exemple

Considérons $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ nous cherchons à déterminer le nombre d'applications de E dans F.

a	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b	1	2	3	1	2	3	1	2	3

Nombre d'applications de E dans F : exemple

Considérons $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ nous cherchons à déterminer le nombre d'applications de E dans F.

a	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b	1	2	3	1	2	3	1	2	3

donc $9 = 3^2$ applications de E dans F

Nombre d'applications de E dans F : Généralisation

Soient E et F deux ensembles finis, avec $Card(E) = p$ et $Card(F) = n$, alors le nombre d'applications de E dans F est :

$$n^p$$

Exemple

On a quatre élèves A, B, C, D qui veulent aller dans six salles de cinéma $1, 2, 3, 4, 5, 6$, de combien de façons différentes les quatre élèves peuvent ils se répartir ?

Exemple

On a quatre élèves A, B, C, D qui veulent aller dans six salles de cinéma $1, 2, 3, 4, 5, 6$, de combien de façons différentes les quatre élèves peuvent ils se répartir ?

$$6^4$$

Arrangements ou Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis

Arrangements : Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\times$ tels que $p \leq n$.

Arrangements : Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\times$ tels que $p \leq n$.
On appelle arrangement de p éléments de F_n tout p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de $(F_n)^p$ tel que $x_1, x_2, .., x_p$ soient deux à deux distincts.

Arrangements : Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\times$ tels que $p \leq n$.
On appelle arrangement de p éléments de F_n tout p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de $(F_n)^p$ tel que $x_1, x_2, .., x_p$ soient deux à deux distincts.

$(1, 4, 2)$ est un arrangement de trois éléments de F_5

Arrangements : Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^{\times}$ tels que $p \leq n$.
On appelle arrangement de p éléments de F_n tout p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de $(F_n)^p$ tel que $x_1, x_2, .., x_p$ soient deux à deux distincts.

$(1, 4, 2)$ est un arrangement de trois éléments de F_5
$(3, 2, 2, 4)$ n'est pas un arrangement

Arrangements : Formule

La donnée d'un arrangement $(x_1, x_2, ..., x_p)$ revient aux données successives de
x_1 dans F_n

Arrangements : Formule

La donnée d'un arrangement $(x_1, x_2, ..., x_p)$ revient aux données successives de
x_1 dans F_n
x_2 dans $F_n - \{x_1\}$

Arrangements : Formule

La donnée d'un arrangement $(x_1, x_2, ..., x_p)$ revient aux données successives de
x_1 dans F_n
x_2 dans $F_n - \{x_1\}$
x_p dans $F_n - \{x_1, x_2, ..., x_{p-1}\}$

Arrangements : Formule

La donnée d'un arrangement $(x_1, x_2, ..., x_p)$ revient aux données successives de
x_1 dans F_n
x_2 dans $F_n - \{x_1\}$
x_p dans $F_n - \{x_1, x_2, ..., x_{p-1}\}$
Le nombre d'arrangements de p éléments dans F_n est donc

$$n(n-1)...(n-(p-1)) = n(n-1)....(n-p+1)$$

Arrangements : Formule

On note

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

qui est le nombre d'arrangements de p éléments de F_n

Arrangements : Formule

On note

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

qui est le nombre d'arrangements de p éléments de F_n
par convention,

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n$$

Arrangements : Formule

On note

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

qui est le nombre d'arrangements de p éléments de F_n
par convention,

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n$$

En particulier

$$A_n^n = n!$$

Arrangements : Interprétation

La donnée d'un arrangement de p éléments de F_n revient à la donnée d'une application injective de F_p dans F_n
L'application

$$f \mapsto (f(1), ..., f(p))$$

rélise une bijection de l'ensemble des applications injectives de F_p dans F_n sur l'ensemble des arrangements de p éléments de F_n

Exemple

De combien de façons quatre élèves peuvent ils être répartis dans six salles de cinéma sachant que chacun va dans une salle différente ?

Exemple

De combien de façons quatre élèves peuvent ils être répartis dans six salles de cinéma sachant que chacun va dans une salle différente ?

$$A_6^4 = 6.5.4.3 = 360$$

Combinaisons

Combinaisons : Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}$,

Combinaisons : Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}$,
On appelle combinaison de p éléments de F_n toute partie de F_n de cardinal p.

Combinaisons : Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}$,
On appelle combinaison de p éléments de F_n toute partie de F_n de cardinal p.

$\{1, 4, 2\} = \{4, 2, 1\}$ est une combinaison de trois éléments de F_5, l'ordre des éléments n'intervient pas.

Combinaisons : Formule

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}$, si $p \leq n$, le nombre de combinaisons de p éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, noté $\binom{n}{p}$ est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinaisons : Remarques

- D'après sa définition, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel non nul (pour $0 \leq p \leq n$) et donc $p!|A_n^p$

Combinaisons : Remarques

- D'après sa définition, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel non nul (pour $0 \leq p \leq n$) et donc $p!|A_n^p$
- Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$

Combinaisons : Remarques

- D'après sa définition, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel non nul (pour $0 \leq p \leq n$) et donc $p!|A_n^p$
- Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Combinaisons : Remarques

- D'après sa définition, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel non nul (pour $0 \leq p \leq n$) et donc $p! | A_n^p$
- Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- On prolonge la définition des $\binom{n}{p}$ par $\binom{n}{p} = 0 \text{ si } (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_-^\times$

Démonstration de la formule

Démonstration

Supposons $p \leq$ et notons $\mathcal{A}_{n,p}$ l'ensemble des arrangemens de p éléments de F_n et $\mathcal{C}_{n,p}$ l'ensemble des combinaisons de p éléments de F_n.

Démonstration de la formule

Démonstration

Supposons $p \leq$ et notons $\mathcal{A}_{n,p}$ l'ensemble des arrangemens de p éléments de F_n et $\mathcal{C}_{n,p}$ l'ensemble des combinaisons de p éléments de F_n.

$$\Theta : (x_1, x_2, \ldots, x_p) \mapsto \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$$

Démonstration de la formule

Démonstration

Supposons $p \leq$ et notons $\mathcal{A}_{n,p}$ l'ensemble des arrangemens de p éléments de F_n et $\mathcal{C}_{n,p}$ l'ensemble des combinaisons de p éléments de F_n.

$$\Theta : (x_1, x_2, ..., x_p) \mapsto \{x_1, x_2, ..., x_p\}$$

Θ est une application surjective de $\mathcal{A}_{n,p}$ dans $\mathcal{C}_{n,p}$

Démonstration de la formule

Démonstration

Supposons $p \leq$ et notons $\mathcal{A}_{n,p}$ l'ensemble des arrangemens de p éléments de F_n et $\mathcal{C}_{n,p}$ l'ensemble des combinaisons de p éléments de F_n.

$$\Theta : (x_1, x_2, ..., x_p) \mapsto \{x_1, x_2, ..., x_p\}$$

Θ est une application surjective de $\mathcal{A}_{n,p}$ dans $\mathcal{C}_{n,p}$
tout élément de $\mathcal{C}_{n,p}$ admet $p!$ antécédants obtenus en permutant $x_1, ..; x_p$.

Démonstration de la formule

Démonstration

Supposons $p \leq$ et notons $\mathcal{A}_{n,p}$ l'ensemble des arrangemens de p éléments de F_n et $\mathcal{C}_{n,p}$ l'ensemble des combinaisons de p éléments de F_n.

$$\Theta : (x_1, x_2, ..., x_p) \mapsto \{x_1, x_2, ..., x_p\}$$

Θ est une application surjective de $\mathcal{A}_{n,p}$ dans $\mathcal{C}_{n,p}$
tout élément de $\mathcal{C}_{n,p}$ admet $p!$ antécédants obtenus en permutant $x_1, ..; x_p$.

$$Card(\mathcal{A}_{n,p}) = p!\,Card(\mathcal{C}_{n,p})$$

Exemple

Dans une classe de quinze élèves, on veut élire un comité de trois élèves. Combien y a t'il de possibilités ?

Exemple

Dans une classe de quinze élèves, on veut élire un comité de trois élèves. Combien y a t'il de possibilités ?

$$\binom{10}{3}$$

Exemple

On se donne dans le plan n droites distinctes "en position générale", $n \geq 4$, en combien de points ces droites se coupent elles.

Exemple

On se donne dans le plan n droites distinctes "en position générale", $n \geq 4$, en combien de points ces droites se coupent elles.

$$\binom{n}{2}$$

, en effet il nous faut deux droites pour avoir un point

Combinaisons : Propriétés

i) $\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

ii) $\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Démonstration

Démonstration i)

- si $0 \leq p \leq n$, alors $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$
- si $p < 0$ ou $p > n$: $\binom{n}{p} = 0$ et $\binom{n}{n-p} = 0$

Démonstration

Démonstration ii)

- si $0 \leq p \leq n-1$:
$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} =$
$\frac{n!}{(p+1)!(n-p)!}((p+1)+(n-p)) = \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}$

Démonstration

Démonstration ii)

- si $p < -1$ ou $p > n$: $\binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} = 0$
- si $p = -1$: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n+1}{0} = 1$
- si $p = n$: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$

Combinaisons : La Formule du binôme de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}$, A un anneau tel que $xy = yx$, alors on a :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

avec $x^0 = y^0 = 1$.

Démonstration

On procède par récurence sur n

Exemples

- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Combinaisons : Corollaire de la formule du binôme

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (-1^k) \binom{n}{k} = 0$

Combinaisons avec répétition

Définition

Soit $1 \leq p \leq n$, on appelle combinaison avec répétition de p éléments de F_n toute liste de p éléments de A non ordonnés distincts ou non Notons S_n^p ce nombre de combinaisons.

Exemples

Si $A = \{a, b, c, d\}$, les combinaisons avec répétition de deux éléments de A sont les suivantes

$[a, a], [a, b], [a, c], [a, d]$
$[b, b], [b, c], [b, d]$
$[c, c], [c, d]$
$[d, d]$

Exemples

Si $A = \{a, b, c, d\}$, les combinaisons avec répétition de deux éléments de A sont les suivantes

$[a, a], [a, b], [a, c], [a, d]$

$[b, b], [b, c], [b, d]$

$[c, c], [c, d]$

$[d, d]$

au total 10 : $\binom{4}{2} = 6$ combinaisons de deux éléments disctincts et 4 combinaisons de deux éléments identiques.

Remarque

Mais cette façon de dénombrer est extremement longue quand p et n sont grands.

Remarque

Mais cette façon de dénombrer est extremement longue quand p et n sont grands.
Il faut en effet dénombrer toutes les combinaisons possibles de p éléments disctincts, de p éléments identiques mais aussi de $(p-1)$ éléments identiques et 1 différent, de $p-2$ éléments identiques et 2 différents...

Autre façon de procéder

Imaginons que chaque élément de F_n soit modélisé par une case numérotée de 1 à n. Il s'agit alors de remplir ces cases avec p croix identiques, réparties arbitrairement dans les cases.

Autre façon de procéder

Imaginons que chaque élément de F_n soit modélisé par une case numérotée de 1 à n. Il s'agit alors de remplir ces cases avec p croix identiques, réparties arbitrairement dans les cases.

$$a \quad b \quad c \quad d$$

$$x| \quad |x|$$

Autre façon de procéder

Imaginons que chaque élément de F_n soit modélisé par une case numérotée de 1 à n. Il s'agit alors de remplir ces cases avec p croix identiques, réparties arbitrairement dans les cases.

$$a \quad b \quad c \quad d$$

$$x| \quad |x|$$

nous avons 2 croix et 4 cases donc 3 séparations $|$

Généralisation

De façon plus générale

$$xxx| \quad |x| \quad |x|\ldots\ldots\ldots\ldots| \quad |xx| \quad |$$

Nous avons p croix, n cases et $n-1$ séparations $|$

Généralisation

De façon plus générale

$$xxx| \quad |x| \quad |x|.............| \quad |xx| \quad |$$

Nous avons p croix, n cases et $n-1$ séparations $|$
Une combinaison avec répétition est donc en fait une liste comportant p croix et $n-1$ séparateurs $|$, donc $n+p-1$ éléments.

Généralisation

De façon plus générale

$$xxx| \quad |x| \quad |x|.............| \quad |xx| \quad |$$

Nous avons p croix, n cases et $n-1$ séparations $|$
Une combinaison avec répétition est donc en fait une liste comportant p croix et $n-1$ séparateurs $|$, donc $n+p-1$ éléments.
Il s'agit dès lors de choisir les p places des x parmi les $n+p-1$ "places" au total :

$$S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Généralisation

De façon plus générale

$$xxx| \quad |x| \quad |x|.............| \quad |xx| \quad |$$

Nous avons p croix, n cases et $n-1$ séparations $|$
Une combinaison avec répétition est donc en fait une liste comportant p croix et $n-1$ séparateurs $|$, donc $n+p-1$ éléments.
Il s'agit dès lors de choisir les p places des x parmi les $n+p-1$ "places" au total :

$$S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Dans l'exemple précédent, $\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$

Bilan

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?
- Quel est le nombre p d'objets concernés par la situation ?

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?
- Quel est le nombre p d'objets concernés par la situation ?
- Les p-objets sont ils considérés sans ordre (en vrac : tirage simultané) ou avec ordre (c'est-à-dire que la situation est différente si les mêmes p-objets sont classés de façon différente) ?

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?
- Quel est le nombre p d'objets concernés par la situation ?
- Les p-objets sont ils considérés sans ordre (en vrac : tirage simultané) ou avec ordre (c'est-à-dire que la situation est différente si les mêmes p-objets sont classés de façon différente) ?
- Les répétitions sont elles impossibles (les p-objets sont tous distincts tirage sans remise) ou possibles (tirage avec remise) ?

Bilan : Tableau récapitulatif

	sans répétition	avec répétition
avec ordre	A_n^p	n^p
sans ordre	$\binom{n}{p}$	$\binom{n+p-1}{p}$

Bilan

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?
- Quel est le nombre p d'objets concernés par la situation ?

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?
- Quel est le nombre p d'objets concernés par la situation ?
- Les p-objets sont ils considérés sans ordre (en vrac : tirage simultané) ou avec ordre (c'est-à-dire que la situation est différente si les mêmes p-objets sont classés de façon différente) ?

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

- Quel est le nombre n d'objets de référence ?
- Quel est le nombre p d'objets concernés par la situation ?
- Les p-objets sont ils considérés sans ordre (en vrac : tirage simultané) ou avec ordre (c'est-à-dire que la situation est différente si les mêmes p-objets sont classés de façon différente) ?
- Les répétitions sont elles impossibles (les p-objets sont tous distincts tirage sans remise) ou possibles (tirage avec remise) ?

Bilan : Tableau récapitulatif

	sans répétition	avec répétition
avec ordre	A_n^p	n^p
sans ordre	$\binom{n}{p}$	$\binom{n+p-1}{p}$

Exemple : une urne

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On pioche successivement 3 boules de l'urne et sans remise.

- Combien y a t'il de tirages possibles ?
- Combien y a t'il de tirages tels que la troisième boule obtenue porte le numéro 2 ?
- Combien y a t'il de tirages tels que la troisième boule obtenue porte un numéro pair ?
- Mêmes questions si on pioche successivement avec remise 3 boules de l'urne.

Une urne

C'est un tirage successif donc l'ordre intervient, et sans remise donc il n'y a pas de répétition possible :
$Card(\Omega) = 6 * 5 * 4 = A_6^3 = 120$

Une urne

C'est un tirage successif donc l'ordre intervient, et sans remise donc il n'y a pas de répétition possible :
$Card(\Omega) = 6 * 5 * 4 = A_6^3 = 120$

Notons A l'événement la troisième boule porte le numéro 2 :
$Card(A) = 5(\text{tout le monde sauf le } 2) *$
$4(\text{tout le monde sauf la précédente et le } 2) * 1 = 20$

Une urne

C'est un tirage successif donc l'ordre intervient, et sans remise donc il n'y a pas de répétition possible :
$Card(\Omega) = 6 * 5 * 4 = A_6^3 = 120$

Notons A l'événement la troisième boule porte le numéro 2 :
$Card(A) = 5(\text{tout le monde sauf le } 2) * 4(\text{tout le monde sauf la précédente et le } 2) * 1 = 20$

Notons B l'événement : "La troisième boule porte un numéro pair", on distingue le 2 le 4 ou le 6 ainsi
$Card(B) = 3 * 20 = 60.$

Une urne

C'est un tirage successif donc l'ordre intervient, et avec remise donc il y a des répétitions possibles : $Card(\Omega) = 6 * 6 * 6 = 6^3$

Une urne

C'est un tirage successif donc l'ordre intervient, et avec remise donc il y a des répétitions possibles : $Card(\Omega) = 6 * 6 * 6 = 6^3$

Notons A l'événement la troisième boule porte le numéro 2 : $Card(A) = 6 * 6 * 1$

Une urne

C'est un tirage successif donc l'ordre intervient, et avec remise donc il y a des répétitions possibles : $Card(\Omega) = 6 * 6 * 6 = 6^3$

Notons A l'événement la troisième boule porte le numéro 2 : $Card(A) = 6 * 6 * 1$

Notons B l'événement : "La troisième boule porte un numéro pair", on distingue le 2 le 4 ou le 6 ainsi $Card(B) = 3 * 36$.