Variables Aléatoires Continues

SR

Cours 1

Remarque

Jusqu'à présent, les variables aléatoires étudiées prenaient des valeurs isolées (nombre de voitures vendues, face obtenue après le lancer d'un dé...)
Or dans les domaines économiques et industriels, nous sommes amenés à étudier des variables aléatoires prenant au moins théoriquement n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple

Par exemple considérons la variable aléatoire X mesurant la durée de bon fonctionnement en jours d'un équipement particulier fabriqué en grande série.
Pour une telle variable aléatoire, les évènements intéressants ne sont pas du type "$X = 400$" ou "$X = 271,5$" mais plutôt "$X \leq 400$" ou "$400 \leq X \leq 1200$".

Loi de probabilité

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace de probabilités, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle, on appelle loi de probabilité associée à X, la donnée de p_X :

$$p_X[a, b] = P(a \leq X \leq b)$$

Densité de probabilité d'une v.a.c

Nous dirons qu'une fonction f est une densité de probabilité si :

- $\forall x \in \mathbb{R}\ f \geq 0$
- f est continue sauf en un nombre fini de points
- on a toujours $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

Variable aléatoire à densité

On dit qu'une va est une variable aléatoire à densité ou encore absolument continue, notée v.a.c, s'il existe une densité de probabilité f telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on ait :

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx$$

Ainsi si X étant une vac, sa loi de probabilité s'exprime par :

$$\forall [a, b] \in \mathbb{R}, P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

avec f_X la densité de probabilité associée à X.

Remarques

- $$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$
- $$\forall a \; P(X = a) = 0$$

  donc X ne charge que les intervalles.

Exemple

Montrer que la fonction définie par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$

$$f(x) = 0.002e^{-0,002x} \quad \text{si} \quad x > 0$$

est bien une densité de probabilité. La variable aléatoire associée X mesure par exemple la durée de bon fonctionnement d'un équipement particulier.

Exemple

Montrer que la fonction définie par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$

$$f(x) = 0.002e^{-0,002x} \quad \text{si} \quad x > 0$$

est bien une densité de probabilité. La variable aléatoire associée X mesure par exemple la durée de bon fonctionnement d'un équipement particulier.
Il s'agit d'une fonction positive, continue (sauf en 0) et telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

Exemple

Déterminer la valeur de c réel pour que la fonction suivante soit une densité de probabilité : soient a et b des réels tels que $a < b$ $f(x) = c \quad x \in [a, b]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Utilisation de la densité de probabilités

- Elle permet, comme nous venons de le voir, de calculer des probabilités
- Elle permet également de déterminer l'espérance et la variance

Variables aléatoires indépendantes : définition

Les variables aléatoires à densité X et Y sont **indépendantes** si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et tout intervalle J de $\mathbb{R}$, on a $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$

Les vaiables aléatoires à densité $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes**, si pour tout $k \in [|2, n|]$ et pour tous indices $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq i_n$ et pour tout intervalle $J_{i_1} \in \mathbb{R}$, pour tout intervalle $J_{i_2} \in \mathbb{R}$, ..., pour tout intervalle $J_{i_k} \in \mathbb{R}$, on a

$P(X_{i_1} \in J_{i_1}, X_{i_2} \in J_{i_2}, ..., X_{i_k} \in J_{i_k}) = P(X_{i_1} \in J_{i_1})P(X_{i_2} \in J_{i_2})...P(X_{i_k} \in J_{i_k})$

Remarque

Comme dans le cas discret, si les v.a X et Y se rapportent à deux expériences aléatoires effectuées de façon indépendante, alors elle sont indépendantes.

Lois usuelles : Loi Uniforme

$a < b$, X suit une loi Uniforme sur $[a, b]$: $X \simeq U(a, b]$ si

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}$$

Lois usuelles : Loi Exponentielle

La loi exponentielle est utilisée pour modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure.

$\lambda > 0$, X suit la loi exponentielle de paramètre λ $X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$ si

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$$

Propriété d'absence de mémoire

Si $X \sim \mathcal{E}$, alors

$$\forall s > 0 \quad t > 0 \quad P(X > t + s / X > t) = P(X > s)$$

Nous montrerons en td que seule la loi exponentielle (parmi les lois absolument continues) possède cette propriété.

Lois usuelles : Loi Normale

La loi normale est une loi fondamental en Probabilités et Statistiques , clef de voute des statistiques inférentielles.

$m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, X suit la loi Normale de paramètres m et σ : $X \simeq N(m, \sigma)$ si sa densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Loi normale centrée réduite

Lorsque $m = 0$ et $\sigma = 1$, on parle d'une loi normale centrée réduite notée $N(0,1)$

Propriétés de la loi Normale

- Propriété fondamentale :

$$X \simeq N(m,\sigma) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \simeq N(0,1)$$

- Si X suit $N(m,\sigma)$ alors $Y = aX + b$ suit $N(am + b, |a|\sigma)$
- Si X suit $N(m,\sigma_1)$, si Y suit $N(m,\sigma_2)$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y$ suit $N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

Lecture directe et indirecte de la table de la loi normale

Représenter graphiquement la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Illustrer les propriétés graphiques suivantes : (Π désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite)

- $P(t_1 \leq X \leq t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$
- $P(-h \leq X \leq h) = 2\Pi(h) - 1$
- $\Pi(-h) = 1 - \Pi(h)$

Lecture directe de la table de la loi normale centrée réduite

Pour $X \simeq N(0,1)$ déterminer par lecture de la table :

$$P(X \leq 1,67)$$

$$P(X \geq 1,25)$$

$$P(X \leq -1,67)$$

$$P(-2 \leq X \leq 2)$$

Lecture directe de la table de la loi normale centrée réduite

Pour $X \simeq N(0,1)$ déterminer par lecture de la table :

$$P(X \leq 1,67)$$

$\Pi(1.67) = 0.9525$

$$P(X \geq 1,25)$$

$$P(X \leq -1,67)$$

$$P(-2 \leq X \leq 2)$$

Lecture directe de la table de la loi normale centrée réduite

Pour $X \simeq N(0,1)$ déterminer par lecture de la table :

$$P(X \leq 1,67)$$

$\Pi(1.67) = 0.9525$

$$P(X \geq 1,25)$$

$= 1 - \Pi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$

$$P(X \leq -1,67)$$

$$P(-2 \leq X \leq 2)$$

Lecture directe de la table de la loi normale centrée réduite

Pour $X \simeq N(0,1)$ déterminer par lecture de la table :

$$P(X \leq 1,67)$$

$\Pi(1.67) = 0.9525$

$$P(X \geq 1,25)$$

$= 1 - \Pi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$

$$P(X \leq -1,67)$$

$1 - \Pi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$

$$P(-2 \leq X \leq 2)$$

Lecture directe de la table de la loi normale centrée réduite

Pour $X \simeq N(0,1)$ déterminer par lecture de la table :

$$P(X \leq 1,67)$$

$\Pi(1.67) = 0.9525$

$$P(X \geq 1,25)$$

$= 1 - \Pi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$

$$P(X \leq -1,67)$$

$1 - \Pi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$

$$P(-2 \leq X \leq 2)$$

$\simeq 0.95$

Lecture Inverse de la table de la loi normale centrée réduite

Déterminer h tel que

$$\Pi(h) = 0,94$$

, $\Pi(h) > 0.5$ donc lecture directe $h = 1.555$

$$\Pi(h) = 0,06$$

Lecture Inverse de la table de la loi normale centrée réduite

Déterminer h tel que

$$\Pi(h) = 0,94$$

, $\Pi(h) > 0.5$ donc lecture directe $h = 1.555$

$$\Pi(h) = 0,06$$

$\Pi(h) < 0.5$ donc $1 - \Pi(h) = \Pi(-h) = 0.94$ donc $-h = 1.555$

Loi Normale et Loi Normale Centrée Réduite

Pour $X \simeq N(4, 2)$, déterminer $P(X \leq 6)$

Pour $X \simeq N(3, 1.5)$, déterminer y pour que $P(X \leq y) = 0,4218$

Loi Normale et Loi Normale Centrée Réduite

Pour $X \simeq N(4,2)$, déterminer $P(X \leq 6)$
$P(X \leq 6) = P(\frac{X-4}{2} \leq 1) = P(U \leq 1) = \Pi(1) = 0.8413$

Pour $X \simeq N(3,1.5)$, déterminer y pour que
$P(X \leq y) = 0,4218$

Loi Normale et Loi Normale Centrée Réduite

Pour $X \simeq N(4,2)$, déterminer $P(X \leq 6)$
$P(X \leq 6) = P(\frac{X-4}{2} \leq 1) = P(U \leq 1) = \Pi(1) = 0.8413$

Pour $X \simeq N(3,1.5)$, déterminer y pour que
$P(X \leq y) = 0,4218$
$P(X \leq y) = P(\frac{X-3}{1.5}) \leq (\frac{y-3}{1.5}) = P(U \leq a) = \Pi(a) = 0.4218$

Loi Normale et Loi Normale Centrée Réduite

Pour $X \simeq N(4,2)$, déterminer $P(X \leq 6)$
$P(X \leq 6) = P(\frac{X-4}{2} \leq 1) = P(U \leq 1) = \Pi(1) = 0.8413$

Pour $X \simeq N(3,1.5)$, déterminer y pour que
$P(X \leq y) = 0,4218$
$P(X \leq y) = P(\frac{X-3}{1.5}) \leq (\frac{y-3}{1.5}) = P(U \leq a) = \Pi(a) = 0.4218$
donc $a < 0$ puisque la probabilité est < 0.5, donc
$\Pi(-a) = 1 - 0.4218 = 0.5782$

Loi Normale et Loi Normale Centrée Réduite

Pour $X \simeq N(4, 2)$, déterminer $P(X \leq 6)$
$P(X \leq 6) = P(\frac{X-4}{2} \leq 1) = P(U \leq 1) = \Pi(1) = 0.8413$

Pour $X \simeq N(3, 1.5)$, déterminer y pour que
$P(X \leq y) = 0, 4218$
$P(X \leq y) = P(\frac{X-3}{1.5}) \leq (\frac{y-3}{1.5}) = P(U \leq a) = \Pi(a) = 0.4218$
donc $a < 0$ puisque la probabilité est < 0.5, donc
$\Pi(-a) = 1 - 0.4218 = 0.5782$
d'où$-a = 0.202$ donc $x = 2.7$

Théorème de Moivre-Laplace

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. Pour n assez grand et p pas trop voisin de 0 et 1, X suit à peu près la loi normale de paramètres np et $\sqrt{npq}$, de même espérance mathématique et de même écart-type.

Correction de continuité

Si X suit $\mathcal{B}(n,p)$, pour trouver une approximation de $P(X = k$ avec $k \in \mathbb{N}$, on ne peut utiliser directement la loi normale car on trouverait 0. Pour corriger ceci on remarque que $P(X = k) = P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5)$ et on détermine cette dernière probabilité à l'aide de la loi normale.

Correction de continuité

Si k_1 et k_2 sont deux entiers compris entre 0 et n, les intervalles $]k_1, k_2[$ et $[k_1, k_2]$ n'ont pas la même probabilité pour la loi binomiale, alors qu'ils ont la même probabilité pour la loi normale. Cela s'explique par la fait qu'on approche une loi discrète par une loi continue. On peut corriger cette différence en remplaçant

- $]k_1, k_2[$ par $[k_1 + 0.5, k_2 - 0.5]$
- $[k_1, k_2]$ par $[k_1 - 0.5, k_2 + 0.5]$

Exemple

Dans un certain type de graines, la probabilité de germination est de $0,8$. Une personne sème 400 graines. Calculer la probabilité qu'au moins 300 graines germent.

Exemple

Introduisons X la variable aléatoire qui compte le nombre de graines germées.

Exemple

Introduisons X la variable aléatoire qui compte le nombre de graines germées.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0.8$, nous cherchons à déterminer $P(X \geq 300)$

Exemple

Introduisons X la variable aléatoire qui compte le nombre de graines germées.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0.8$, nous cherchons à déterminer $P(X \geq 300)$
nous allons approcher cette loi normale par la loi normale de paramètres $m = np = 400 * 0.8 = 320$
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{320 * 0.2} = 8$

Exemple

Introduisons X la variable aléatoire qui compte le nombre de graines germées.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0.8$, nous cherchons à déterminer $P(X \geq 300)$
nous allons approcher cette loi normale par la loi normale de paramètres $m = np = 400 * 0.8 = 320$
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{320 * 0.2} = 8$
or $P(X \geq 300) = P(X \geq 299.5) = P(\frac{X-320}{8} \leq \frac{299.5-320}{8}) = P(U \geq -2.5625) \simeq 0.9948$

Espérance

On dit que X est intégrable si $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx < +\infty$
L'espérance de X est alors donnée par :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Exemple

Calculer et interpréter l'espérance dans notre exemple.

Exemple

Calculer et interpréter l'espérance dans notre exemple.

Pour $a > 0$ $\quad \int_0^a tf(t)dt = \int_0^a 0,002te^{-0,002t}dt =$

via une ipp

Exemple

Calculer et interpréter l'espérance dans notre exemple.

Pour $a > 0$ $\quad \int_0^a tf(t)dt = \int_0^a 0,002te^{-0,002t}dt =$

$-ae^{-0,002a} - \frac{e^{-0,002a}}{0,002} + \frac{1}{0,002}$ via une ipp

$E(X) = 500$

Exemple

Calculer et interpréter l'espérance dans notre exemple.

Pour $a > 0$ $\int_0^a tf(t)dt = \int_0^a 0,002te^{-0,002t}dt =$
$-ae^{-0,002a} - \frac{e^{-0,002a}}{0,002} + \frac{1}{0,002}$ via une ipp

$E(X) = 500$

En moyenne l'équipement fonctionne correctement pendant 500 jours

Exemple

Déterminer l'espérance d'une loi uniforme continue et pour une loi exponentielle.

Exemple pour la loi Uniforme

$$X \simeq U(a, b]$$

Exemple pour la loi Uniforme

$$X \simeq U(a, b]$$

$$\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = [\frac{x^2}{2(b-a)}]_a^b$$

Exemple pour la loi Uniforme

$$X \simeq U(a, b]$$

$$\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = [\frac{x^2}{2(b-a)}]_a^b$$

$$E(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Exemple : loi exponentielle

$$X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$$

Exemple : loi exponentielle

$$X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$$

$$\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0} dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Exemple : loi exponentielle

$$X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$$

$$\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0} dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Par une IPP, $u'(x) = e^{-\lambda x}$ et $v(x) = \lambda x$
$u(x) = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}$ et $v'(x) = \lambda$

Exemple : loi exponentielle

$$X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$$

Exemple : loi exponentielle

$$X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$$

$$E(X) = [-xe^{-\lambda x}]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x} dx = [-xe^{-\lambda x} + \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^A$$

Exemple : loi exponentielle

$$X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$$

$$E(X) = [-xe^{-\lambda x}]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x} dx = [-xe^{-\lambda x} + \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^A$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Esperance de la loi normale (admis)

$$X \simeq N(m, \sigma) \quad E(X) = m \quad Var(X) = \sigma^2$$

Propriétés de l'espérance

Les propriétés restent les mêmes que dans le cas discret, sous réserve de convergence des intégrales :

Propriétés

- Si $X = a$ c'est-à-dire si $X(\Omega) = \{a\}$ then $E(X) = a$
- Si a et b sont des réels et X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

  (L'espérance est un opérateur linéaire.)
- $E(X - E(X)) = 0$, on dit que la va $X - E(X)$ est centrée.

Esperance et indépendance

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes intégrables alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Remarque

Comme pour les variables aléatoires discrètes, l'espérance ne suffit pas à caractériser une variable aléatoire.

Variance

Soit $p \geq 1$, on dit que X est p intégrable si

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p f_X(x) dx < +\infty$$

Si X est de carré intégrable, la variance de X est le nombre réel positif donné par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

avec

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx$$

Exemple

Déterminer la variance d'une loi uniforme continue.

Variance d'une loi uniforme continue

$X \simeq U(a, b]$

Variance d'une loi uniforme continue

$X \simeq U(a, b]$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{b-a} 1_{[a,b]} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = [\frac{x^3}{3(b-a)}]_a^b$$

Variance d'une loi uniforme continue

$$X \simeq U(a, b]$$
$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{b-a} 1_{[a,b]} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = [\frac{x^3}{3(b-a)}]_a^b$$
$$E(X^2) = \frac{b^2+ab+b^2}{3}$$

Variance d'une loi uniforme continue

$X \simeq U(a, b]$

$\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{b-a} 1_{[a,b]} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = [\frac{x^3}{3(b-a)}]_a^b$

$E(X^2) = \frac{b^2+ab+b^2}{3}$

$Var(X) = \frac{b^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$

Propriétés de la variance

Sous réserve des convergences des intégrales, nous obtenons comme dans le cas discret :

Propriétés

Si X est de carré intégrable alors pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$Var(aX) = a^2 Var(X) \quad Var(X + b) = Var(X)$$

Variance et Indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes de carré intégrable alors :

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Définitions

Soit x une v.a de densité f et ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sous réserve que l'intégrale soit absolument convergente, on a :

$$E(\phi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) dx$$

En particulier, sous réserve de convergence de l'intégrale, on peut définir le moment d'ordre p par :

$$E(X^p) = \int_{\mathbb{R}} x^p f(x) dx$$

Résumé pour les variables aléatoires continues

Lois continues

Nom	Loi	$P(X=k)$	$E(X)$	$Var(X)$
Uniforme sur $[a,b]$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\chi_{x\geq 0}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$N(m,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

Fonction de répartition d'une v.a.c

Définition

Soit X une v.a.c, sa fonction de répartition est définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \; F_X(a) = P(X \leq a)$$

Propriétés de la Fonction de répartition

Soit X une v.a.c de densité f_X et de fonction de répartition F_X

- F_X est continue
- F_X est croissante car

$$\forall a, b \in \mathbb{R} a \leq b \quad F_X(b) - F_X(a) = P(a \leq X \leq b)$$

- $$lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0 \quad lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \; F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_x(x) dx$$

-

Exemples

- Calculer la fonction de répartition dans notre exemple, la représenter graphiquement. Déterminer et représenter graphiquement $P(X \leq 400)$ et $P(X > 1000)$ et $P(400 \leq X \leq 1000)$
- Déterminer la fonction de répartition pour une loi exponentielle.

Exemple

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt = [-e^{-0,002t}]_0^x = 1 - e^{-0,002x}$$

Exemple

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt = [-e^{-0{,}002t}]_0^x = 1 - e^{-0{,}002x}$$

$$P(X \leq 400) = F(400) = 1 - e^{-0{,}8} \simeq 0,55$$

Exemple

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt = [-e^{-0,002t}]_0^x = 1 - e^{-0,002x}$$

$$P(X \leq 400) = F(400) = 1 - e^{-0,8} \simeq 0,55$$
$$P(X > 1000 = P(X \geq 1000) = 1 - F(1000) \simeq 0,14$$

Exemple

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt = [-e^{-0,002t}]_0^x = 1 - e^{-0,002x}$$

$$P(X \leq 400) = F(400) = 1 - e^{-0,8} \simeq 0,55$$
$$P(X > 1000 = P(X \geq 1000) = 1 - F(1000) \simeq 0,14$$
$$P(400 \leq X \leq 1000) = F(1000) - F(400) \simeq 0,31$$

Théorème de changement de variables

Soit X une vac de densité f et h une fonction dérivable, strictement monotone et dont la dérivée ne s'annule pas. Si $Y = h(X)$ alors Y admet pour densité :

$$\forall y \in V \ f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)|(h^{-1})'(y)|$$

Théorème de changement de variables

$$(h(h^{-1}(y)) = y$$

$$(h^{-1})'(y)h'(h^{-1}(y)) = 1$$

$$(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}$$

sous conditions d'existence,

$$\forall y \in V \ f_Y(y) = \frac{f_X(h^{-1}(y))}{|h'(h^{-1}(y))|}$$

Exemple

Posons $Y = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$
$Y = h(X)$ $y = h(x) = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}(y - b) = h^{-1}(y)$
$(h^{-1})'(y) = \frac{1}{a}$
h est un difféomorphisme et

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{Y-b}{a})$$

Remarque

Les conditions d'application de la proposition sont restrictives et elle n'est pas simple à mémoriser. Il est donc plus intéressant de savoir refaire le raisonnement.
Si h n'est pas bijective, nous pouvons dans certains cas particuliers exprime f_Y. Par exemple si $Y = X^2$.

Remarques

- $$\forall y \in \mathbb{R}\ F_y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0 \text{ si } y < 0$$
- $$\forall y \in \mathbb{R}^+\ F_y(y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y})$$
- $$\forall y \in \mathbb{R}^+\ F_y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$
- puis on dérive cette expression ainsi :

$$f_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] \text{ si } y > 0$$

$$f_Y(y) = 0 \text{ si } y \leq 0$$

Fonction caractéristique : Définition

On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire absolument continue X la transformée de Fourier de sa densité f_X :

$$\forall t \in \mathbb{R} \; \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX} f_X(x) dx$$

Exemple

Déterminer la fonction caractéristique d'une v.a suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$

Exemple

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-1}^{1} e^{itX} \frac{1}{2} dx = \frac{sin(t)}{t}$$

Remarque pour le cas discret

Si X est une v.a discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction caractéristique est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X = n)$$

Propriétés de la fonction caractéristique

- ϕ_X caractérise la loi de X ce qui veut dire que si $\phi_X = \phi_Y$ alors X et Y ont même loi
- La fonction caractéristique permet de calculer simplement les différents moments de la variable X, si la dérivée d'ordre k existe :

$$\phi_{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$