Variables Aléatoires Discrètes

SR

Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités,
On appelle **variable aléatoire (v.a. en abrégé) discrète** définie sur Ω, toute application,

$$\begin{array}{cccc} X : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

- $X(\omega)$ qui est l'ensemble des valeurs prises par X, est fini ou dénombrable.
- $\forall x_i \in X(\Omega) \quad \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}$. C'est l'événement de $\mathcal{A}$: X prend la valeur x_i.

Proposition

Proposition

On peut alors construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X)$ en posant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(A)), P_X(\Omega) = P(\{\omega \ \in \Omega \, X(\omega) \in A\})$$

On peut vérifier que c'est bien une probabilité sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$. On notera $P(X \in A)$ la probabilité $P_X(A)$ et $P(X = x_i)$ la probabilité $P_X(\{x_i\})$. En particulier, on aura donc

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$$

Définition

La probabilité ci-dessus est appelée **loi de probabilité de** X. Elle est caractérisée par la donnée de $P(X = x_i)$ pour chaque x_i de $X(\Omega)$.

Exemple Introductif

Considérons le lancement de deux dés de couleurs différentes :

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),...(1,6)..................(6,1),(6,2),...,(6,1)\}$$

Définissons

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X : (i,j) \mapsto |i-j|$$

.

Justifier que c'est bien une vad et déterminer sa loi de probabilité.

Exemple Introductif

Considérons le lancement de deux dés de couleurs différentes :

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),...(1,6)..................(6,1),(6,2),...,(6,1)\}$$

Définissons

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X : (i,j) \mapsto |i-j|$$

.

Justifier que c'est bien une vad et déterminer sa loi de probabilité.

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$$

Loi de probabilité de l'exemple

Nous avons ici

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Loi de probabilité de l'exemple

Nous avons ici

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Déterminons $P(X = k)$ pour $k \in X(\omega)$ à savoir la loi de probabilité de cette variable aléatoire

Loi de probabilité de l'exemple

Pour $k = 0$,

$$X = 0 \Leftrightarrow |i - j| = 0 \Leftrightarrow i = j$$

Loi de probabilité de l'exemple

Pour $k = 0$,

$$X = 0 \Leftrightarrow |i - j| = 0 \Leftrightarrow i = j$$

Il nous faut donc déterminer le nombre de couples (i, j) de la forme (i, i)

Loi de probabilité de l'exemple

Pour $k = 0$,

$$X = 0 \Leftrightarrow |i - j| = 0 \Leftrightarrow i = j$$

Il nous faut donc déterminer le nombre de couples (i, j) de la forme (i, i)
Nous avons donc 6 couples de cette forme ainsi

$$P(X = 0) = \frac{6}{36}$$

Loi de probabilité de l'exemple

Pour $k = 1$,

$$X = 1 \Leftrightarrow |i - j| = 1 \Leftrightarrow i = 1 + j \quad \text{ou} i = j - 1$$

Loi de probabilité de l'exemple

Pour $k = 1$,

$$X = 1 \Leftrightarrow |i - j| = 1 \Leftrightarrow i = 1 + j \quad \text{ou} \, i = j - 1$$

Il nous faut donc déterminer le nombre de couples (i, j) de la forme $(i, i - 1)$ pour $i \in |2, 6]$ ou $(i, i + 1)$ pour $i \in [1, 5]$

Loi de probabilité de l'exemple

Pour $k = 1$,

$$X = 1 \Leftrightarrow |i - j| = 1 \Leftrightarrow i = 1 + j \quad \text{ou} i = j - 1$$

Il nous faut donc déterminer le nombre de couples (i, j) de la forme $(i, i - 1)$ pour $i \in |2, 6]$ ou $(i, i + 1)$ pour $i \in [1, 5]$ Nous avons donc 10 couples de cette forme ainsi

$$P(X = 1) = \frac{10}{36}$$

Loi de probabilité de l'exemple

Et ainsi de suite, nous obtenons le tableau de la loi de probabilité de X :

$X(\omega)$	0	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Définitions de v.a indépendantes

On dit que les vad X et Y sont indépendantes, si $\forall x \in X(\Omega)$ $\forall y \in Y(\Omega)$, les évènements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants.

Les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si pour tout $k \in [|2, n|]$, et pour indices $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$,
$\forall x_{i_1} \in X_{i_1}, \forall x_{i_2} \in X_{i_2}, ... \forall x_{i_k} \in X_{i_k}$ les évènements $\{X_{i_1} = x_{i_1}\}$ $\{X_{i_2} = x_{i_2}\} ... \{X_{i_k} = x_{i_k}\}$ sont mutuellement indépendants.

Exemple fondamental

Des v.a X et Y sont indépendantes si elles se rapportent à deux expériences effectuées de façon indépendante. Ainsi lorsqu'on fait plusieurs répétitions indépendantes d'une même expérience (tirages successifs avec remise par exemple) : soit X_1 le résultat du premier essai,..., X_n le résultat du n ième essai, les v.a X_1,...X_n sont indépendantes

Loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire qui n'a que deux issues :

- le succès qui se produit avec la probabilité p
- l'échec qui se produit avec la probabilité $q = 1 - p$

La loi de Bernoulli est la loi d'une variable aléatoire qui code le résultat d'une épreuve de Bernoulli avec 0 pour l'échec et 1 pour le succès.

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$P(X = 1) = p$$

Loi Uniforme discrète

C'est la loi qui correspond au cas où l'on a équiprobabilité.

$$X(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}\ a_i \in \mathbb{R}\ i \in [\![1, n]\!]$$

$$\forall 1 \leq k \leq n \quad P(X = a_k) = \frac{1}{n}$$

Remarque : la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ *est une loi uniforme* discrète.

Loi Binomiale

Partons d'une expérience ne comportant que deux résultats possibles qui peut donc être modélisée par une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et répétons n fois l'expérience de façon **indépendante**. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi ces n expériences est appelée une loi Binomiale notée $\mathcal{B}(n, p)$. La loi binomiale est caractérisée par deux paramètres : n qui correspond au nombre de fois où l'on répète l'expérience et p qui correspond à la probabilité de succès dans une expérience.

$$X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple

On dispose d'une urne avec 5 boules rouges et 15 boules noires. On tire 4 boules avec remise à chaque tirage.Soit X la va qui compte le nombre de boules noires obtenues. Quelle est la loi de X ?

Exemple

On dispose d'une urne avec 5 boules rouges et 15 boules noires. On tire 4 boules avec remise à chaque tirage.Soit X la va qui compte le nombre de boules noires obtenues. Quelle est la loi de X ?

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad X \simeq \mathcal{B}(4, \frac{3}{4})$

$\forall k \in [\![0, 4]\!]\ P(X = k) = \binom{4}{k} \frac{15}{20}^{k} \frac{5}{20}^{4-k}$

Loi hypergéométrique

Le contexte est celui d'un tirage simultané de n individus dans une population de taille $m >> n$. Une proportion p de la population possède un caractère fixé. On introduit la va X qui correspond au nombre d'individus tirés possédant le caractère étudié. Elle est notée : $H(m, n, p)$

$$X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$$

$$\forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = \frac{\binom{mp}{k}\binom{m(1-p)}{n-k}}{\binom{m}{n}} \quad \text{si} \quad k \leq mp$$

$$\forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = 0 \quad \text{si} \quad k > mp$$

Exemple

Sur un lot de 10 pièces d'équipement, trois pièces sont non conformes. On tire simultanément 5 pièces, quelle est la loi du nombre de pièces non conformes

Exemple

Sur un lot de 10 pièces d'équipement, trois pièces sont non conformes. On tire simultanément 5 pièces, quelle est la loi du nombre de pièces non conformes $H(10, 5, 0.3)$

Exemple

Une urne contient 10 boules dont 7 sont blanches. On prélève 3 boules dans l'urne et simultanément. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches. Calculer $P(X = 2)$.

Exemple

Une urne contient 10 boules dont 7 sont blanches. On prélève 3 boules dans l'urne et simultanément. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches. Calculer $P(X=2)$.

$X \simeq H(10,7,3)$ donc $P(X=2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{10-2}{7-2}}{\binom{10}{7}}$

Approximation par la loi binomiale

Pour n, p, k fixés,

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\binom{mp}{k}\binom{m(1-p)}{n-k}}{\binom{m}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En pratique, cela permet d'approcher la loi hypergéométrique par la loi binomiale plus simple d'utilisation lorsque m est très grand.
Ceci signifie que lorsque l'on fait un tirage de n individus, si m est grand cela ne change presque rien que le tirage soit avec ou sans remise. On pourra donc supposer que le tirage se fait avec remise si $m >> n$. En pratique dès que $\frac{n}{m} < 0.1$.

Exemple

Sur un lot de 10000 pièces, 30% des pièces sont non conformes. On tire simultanément 5 pièces. Quelle est la loi de la va indiquant le nombre de pièces non conformes ?

Exemple

Sur un lot de 10000 pièces, 30% des pièces sont non conformes. On tire simultanément 5 pièces. Quelle est la loi de la va indiquant le nombre de pièces non conformes ?
Elle suit approximativement une loi binomiale $\mathcal{B}(5, 0.3)$

Preuve

Décomposons
$\frac{\binom{mp}{k}\binom{m(1-p)}{n-k}}{\binom{m}{n}}. : \frac{\binom{mp}{k}\binom{m(1-p)}{n-k}}{\binom{A}{n}} = \frac{(mp)!}{k!(mp-k)!} \cdot \frac{(m(1-p))!}{(n-k)!(m(1-p)-n+k)!} \cdot$
$\frac{n!(m-n)!}{m!} := \binom{n}{k} \frac{(mp)!}{(mp-k)!} \cdot \frac{(m(1-p))!}{(m(1-p)-n+k)!} \cdot \frac{(m-n)!}{m!}$
Pour $m \to +\infty$, on
a : : $\frac{(mp)!}{(mp-k)!(mp)^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{mp-k+i}{mp} = \prod_{i=1}^{k}(1+o(1)) = 1+o(1)$
et l'on obtient $\frac{mp!}{(mp-k)!} \sim (mp)^k$
* Le même raisonnement pour le second terme permet d'obtenir : $\frac{(m(1-p))!}{(m(1-p)-n+k)!} \sim (m(1-p))^{n-k}$.
* Enfin, pour le troisième terme : $\frac{m!}{(m-n)!} \sim m^n$.
En conclusion, on a :
$\frac{\binom{mp}{k}\binom{m(1-q)}{n-k}}{\binom{m}{n}} \sim_{m \to +\infty} \binom{n}{k} \frac{(mp)^k (m(1-p))^{n-k}}{m^n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Lois usuelles : Contexte de la loi géométrique

Nous nous intéressons à une succession d'épreuves de Bernoulli, à l'issue de chacune d'elle soit il y a un échec avec la probabilité $1 - p$ soit il y un succès avec la probabilité p. On s'intéresse à l'apparition du premier succès.

Lois usuelles : Loi Géométrique

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}$$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$X \simeq G(p)$$

Loi de Poisson

C'est la loi des évènements rares.

La loi de Poisson est caractérisée par un paramètre $\lambda > 0$. Elle est définie par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$X \simeq P(\lambda)$$

Remarque : $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < p < 1$, supposons que lorsque $p = \frac{\lambda}{n}$ avec une constante $\lambda > 0$ de sorte que quand n tend vers $+\infty$, p tende vers 0 Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
La loi de Poisson apparait donc comme une approximation de la loi binomiale quand n est "grand" et p est "petit.

Preuve

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

Preuve

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

Preuve

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

Preuve

$$= \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n})}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

Preuve

$$= \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{i}{n}) = 1$$

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} = \lim_{n\to+\infty} e^{-kln(1-\frac{\lambda}{n})} = 1$$

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} = \lim_{n\to+\infty} e^{-k ln(1-\frac{\lambda}{n})} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n ln(1-\frac{\lambda}{n})} = e^{-\lambda} \quad \mathrm{DL}$$

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} = \lim_{n\to+\infty} e^{-kln(1-\frac{\lambda}{n})} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{nln(1-\frac{\lambda}{n})} = e^{-\lambda} \quad \text{DL}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson en pratique

Si n est grand et p assez petit, on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de même espérance mathématique $\mathcal{P}(\lambda)$.
On admet souvent que cette approximation est satisfaisante lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$ avec $np \leq 10$.
Mais il s'agit d'une convention, qui peut varier selon les auteurs. L'intérêt d'une telle approximation apparait quand les calculs sont plus simples.

Exemple

Par exemple, avec la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.05)$ on a :

$$P(X = 4) = \binom{100}{4}(0.05)^4(0.95)^{96} \simeq 0.178$$

et si nous l'approchons par une loi de Poisson de paramètre 5 :

$$P(X = 4) = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \simeq 0.175$$

Avec un temps de calcul réduit, on obtient une valeur numérique très satisfaisante.

En pratique

$\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par $\mathcal{P}(np)$ si les conditions suivantes sont réalisées :

$$n \geq 30 \quad p \leq 0.1 \quad np \leq 10$$

Exemple

On admet que pour un type d'équipement informatique la durée de vie moyenne exprimée en années est de 3 ans. Calculer la probabilité pour que la durée de vie soit strictement supérieure à 1.

Exemple

On admet que pour un type d'équipement informatique la durée de vie moyenne exprimée en années est de 3 ans. Calculer la probabilité pour que la durée de vie soit strictement supérieure à 1.

$X \simeq \mathcal{P}(3) \quad P(X > 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3}$

Exemple

L'opératrice d'un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.

1. Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 5 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que ce nombre d'appels dépasse 15 ?

Exemple

On divise l'intervalle de temps : 1 min en $n = 60s$ et à chaque seconde soit il y un appel soit il n'y en a pas : avec $p = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ donc la va comptant le nb d'appels reçus en $1s$ suit une loi binomiale de paramètres $p = 1/30$ et $n = 60$. Nous pouvons approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. Par le même raisonnement en 5 min, le nombre d'appels reçus sut une loi de Poisson de paramètre 10. (car 10 appels en 5 min i.e 10 appels en 300 secondes.)

Exemple

On divise l'intervalle de temps : 1 min en $n = 60s$ et à chaque seconde soit il y un appel soit il n'y en a pas : avec $p = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ donc la va comptant le nb d'appels reçus en $1s$ suit une loi binomiale de paramètres $p = 1/30$ et $n = 60$. Nous pouvons approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. Par le même raisonnement en 5 min, le nombre d'appels reçus sut une loi de Poisson de paramètre 10. (car 10 appels en 5 min i.e 10 appels en 300 secondes.)

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

Espérance d'une v.a.d

On dit que X est intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de X notée $E(X)$ est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Elle correspond à la valeur moyenne

Exemples

Déterminer l'espérance

- de l'exemple introductif.
- pour une loi de Bernoulli
- pour une loi de Poisson

Exemple introductif

Dans notre exemple,

$$E(X) = 0 * \frac{6}{36} + 1 * \frac{10}{36} + 2 * \frac{8}{36} + 3 * \frac{6}{36} + 4 * \frac{4}{36} + 5 * \frac{2}{36} = \frac{70}{36}$$

Exemple : Loi de Bernoulli

$X \simeq B(p)$

$E(X) = 1 * p + 0(1 - p) = p$

Exemple : Loi de Poisson

$X \simeq \mathcal{P}$

$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$
$e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$

Propriété de l'espérance

- Si $X = a$ c'est-à-dire si $X(\Omega) = \{a\}$ then $E(X) = a$
- Si a et b sont des réels et X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

  (L'espérance est un opérateur linéaire.)
- $E(X - E(X)) = 0$, on dit que la va $X - E(X)$ est centrée.

Esperance et indépendance

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes intégrables alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Remarque

L'espérance mathématique ne suffit pas à décrire une variable aléatoire discrète : en effet soit X la variable aléatoire mesurant le gain d'un joueur lors d'une loterie comportant 1000 numéros faisant tous gagner 5 euros, et soit Y son an analogue dans une loterie de 1000 numéros dont un seul est gagnant et fait gagner 5000 euros. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$, qu'en concluez vous ?

Remarque

L'espérance mathématique ne suffit pas à décrire une variable aléatoire discrète : en effet soit X la variable aléatoire mesurant le gain d'un joueur lors d'une loterie comportant 1000 numéros faisant tous gagner 5 euros, et soit Y son an analogue dans une loterie de 1000 numéros dont un seul est gagnant et fait gagner 5000 euros. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$, qu'en concluez vous ?

$E(X) = 1 * 5 = 5$ $E(Y) = \frac{1}{1000} * 5000 + \frac{999}{1000} * 0 = 5$

$E(X) = E(Y)$ pourtant X et y ne sont pas les mêmes variables aléatoires

Moment d'ordre p d'une v.a.d

On dit que X est de puissance p-intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x^p| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de X^p notée $E(X)$, appelée moment d'ordre p est définie par :

$$E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$$

Par exemple, si X est de carré intégrable alors

$$E(X^2) = \sum x^2 P(X = x)$$

Variance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable
La variance de X est le nombre réel positif donné par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(x))^2 P(X = x)$$

On peut montrer que

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$$

L'écart-type, noté $\sigma(X)$ est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Propriétés de la Variance

Propriétés

Si X est de carré intégrable alors pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$Var(aX) = a^2 Var(X) \quad Var(X + b) = Var(X)$$

Variance et Indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de carré intégrable alors :

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Exemples

Prouver la formule précédente.
En déduire l'expression de la variance pour une loi binomiale.

Preuve

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 =$$
$$E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

par linéarité de l'espérance et puisque $E(XY) = E(X)E(Y)$

Exemple

Déterminer la variance de l'exemple introductif

Exemple : Variance de l'exemple introductif

$$E(X) = 0^2 * \frac{6}{36} + 1^2 * \frac{10}{36} + 2^2 * \frac{8}{36} + 3^2 * \frac{6}{36} + 4^2 * \frac{4}{36} + 5^2 * \frac{2}{36} = \frac{210}{36}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 2.06$$

Signification concrète de la variance

Il s'agit d'une mesure de la dispersion des valeurs prises par la variable, dispersion autour de son espérance (sa moyenne) et en tenant compte des probabilités d'apparition des valeurs.

Résumé pour les variables aléatoires discrètes

Lois discrètes

Nom	Loi	$P(X=k)$	$E(X)$	$Var(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(p)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Fonction de répartition d'une v.a.d

Soit X une v.a.d, sa fonction de répartition est définie par :

$$\forall a \ \in \mathbb{R} \ F_X(a) = P(X \leq a)$$

où $P(X \leq a)$ désigne la probabilité de $\{x_i \in X(\Omega) \quad x_i \leq a\}$

Propriétés de la fonction de répartition

Propriétés

La fonction de répartition d'une v.a.d X vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fonction en escalier
- Elle est continue à droite
- $lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$ $lim_{a \to +\infty} F_x(a) = 1$

Remarque

Si on connait la loi de X, il est facile de calculer la fonction la fonction de répartition :

$$F(x) = \sum_{x_i \in X(\Omega) \quad x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Remarque

Réciproquement si on connait la fonction de répartition, il est facile de retrouver la loi. Supposons par exemple que dans $X(\Omega)$, les x_i soient rangés par ordre croissant,
$F(x_i) = P(X \leq x_i) = P(X \leq x_{i-1} \quad \text{ou} \quad X = x_i) = P(X \leq x_{i-1} + P(X = x_i) = F(x_{i-1} + P(X = x_i)$
d'où

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Exemple

Donner la fonction de répartition de l'exemple introductif.

Fonction de répartition de l'exemple introductif

$X(\omega)$	0	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$
$F(X)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{34}{36}$	1

Loi conditionnelle

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes prenant un nombre dénombrable de valeurs, alors la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \text{tel que} \quad P(X = x) > 0$$

$$P_{Y/X=x}(y) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(X = x)}$$

$$E(Y/X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P_{Y/X=x}(y)$$

Exemple

Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p. Quelle est la loi de Y ?

Exemple

On remarque d'abord que Y est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k/X = n)P(X = n)$$

Exemple

On remarque d'abord que Y est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=k/X=n)P(X=n)$$

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Exemple

On remarque d'abord que Y est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=k/X=n)P(X=n)$$

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$P(Y=k)=\frac{p^k e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\sum^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}q^{n-k}}{(n-k)!}$$

Exemple

$$P(Y = k) = \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} e^{\lambda q}$$

Exemple

$$P(Y = k) = \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} e^{\lambda q}$$

$$P(Y = k) = \frac{e^{-p\lambda} (\lambda p)^k}{k!}$$

Fonction caractéristique : Définition

On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète X :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(x = k)e^{itk}$$

Propriétés de la fonction caractéristique

- ϕ_X caractérise la loi de X ce qui veut dire que si $\phi_X = \phi_Y$ alors X et Y ont même loi
- $\forall n \geq 1$, si $E[|X|^n] < +\infty$ alors ϕ_X est dérivable jusqu'à l'ordre n et $\forall 1 \leq k \leq n$

$$\phi_X^{(k)}(t) = i^k E[X^k e^{itX}]$$

$$\phi_{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}(E(X^k) + o(|t|^n)$$

Fonctions caractéristiques des lois usuelles

Loi de Bernoulli

$$X \simeq B(p)$$

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{1} e^{itk} P(X = k) = 1 - p + pe^{it}$$

Fonctions caractéristiques des lois usuelles

Loi Binomiale

$$X \simeq B(n, p)$$

$$\phi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

Fonctions caractéristiques des lois usuelles

Loi de Poisson

$$X \simeq \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Fonctions caractéristiques des lois usuelles

Loi Géométrique

$$X \simeq G(p)$$

$$\phi_X(t) = pe^{it}\frac{1}{1-(1-p)e^{it}}$$

Exemple

- Déterminer l'expression de la fonction caractéristique pour une loi binomiale
- En utilisant cette expression, retrouver la formule de l'espérance et de la variance de X.

Troisième Outil : La Fonction Génératrice

Soit X une v.a.discrète définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice associée à X la fonction G_x définie pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P(X = n)$$

Propriétés de la fonction génératrice

- G_X est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. G_X est bien définie sur $[-1, 1]$

Propriétés de la fonction génératrice

- G_X est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. G_X est bien définie sur $[-1, 1]$
- G_X est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et infiniment dérivable sur $]-1, 1[$

Propriétés de la fonction génératrice

- G_X est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. G_X est bien définie sur $[-1, 1]$
- G_X est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et infiniment dérivable sur $]-1, 1[$
- G_X caractèrise la loi de X : deux variables aléatoires ayant même fonction génératrice ont même loi. En particulier :

$$P(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0)$$

Propriétés de la fonction génératrice

- $\forall k \geq 1$, $E(X^k)$ est finie si et seulement si G_x admet une dérivée d'ordre k au point 1. Dans ce cas

$$G_X^{(k)}(1) = E[X(X-1)...(X-k+1)]$$

En particulier,

$$G_X'(1) = E(X)$$

$$G_X''(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

$$Var(X) = G_X''(1) + G_X'(1)(1 - G_X'(X))$$

Démonstration

- Par la formule d'Hadamard,
$$\frac{1}{R} = \overline{lim}_{n\infty} P(X = n)^{\frac{1}{n}}$$
mais $P(X \leq n) \leq 1$ d'où $\overline{lim}_{n\infty} P(X = n)^{\frac{1}{n}} \leq 1$ d'où $R \leq 1$

Démonstration

- Par la formule d'Hadamard,

$$\frac{1}{R} = l\bar{i}m_{n\infty} P(X = n)^{\frac{1}{n}}$$

mais $P(X \leq n) \leq 1$ d'où $l\bar{i}m_{n\infty} P(X = n)^{\frac{1}{n}} \leq 1$ d'où $R \leq 1$

- par propriété des séries entières

Démonstration

- Par la formule d'Hadamard,

$$\frac{1}{R} = \bar{lim}_{n\infty} P(X = n)^{\frac{1}{n}}$$

  mais $P(X \leq n) \leq 1$ d'où $\bar{lim}_{n\infty} P(X = n)^{\frac{1}{n}} \leq 1$ d'où $R \leq 1$
- par propriété des séries entières
- Soit par récurrence, soit $\forall n \geq 1$ et $s \in]-1, 1[$

$$G_X^{(n)}(s) = \frac{\partial^n E(s^X)}{\partial s^n} = E(\frac{\partial^n (s^X)}{\partial s^n})$$

$$G_X^{(n)}(s) = E[X(X-1)...(X-n+1)s^{X-n}]$$

$$G_X^{(n)}(s) = \sum k(k-1)...(k-n+1)s^{k-n} P(X = k)$$

Démonstration

- Pour $s = 0$ on a $G_X^{(n)}(0) = n!P(X = n)$ d'où

$$P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

car si $s = 0$ alors $s^{k-n} = 0$ sauf si $k = n$

Fonctions génératrices usuelles

Loi de Bernoulli

Si $X \simeq B(p)$ alors $n \geq 2$ $P(X = n) = 0$ donc X est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R} \; G(s) = E(s^k) = \sum_{n=0}^{1} s^n P(X = n) = 1 - p + sp$$

Fonctions génératrices usuelles

Loi Binomiale

Si $X \simeq B(n, p)$ alors X est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R} \; G(s) = E(s^k) = (1 - p + sp)^n$$

Fonctions génératrices usuelles

Loi de Poisson

Si $X \simeq P(\lambda)$ alors X est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R} \; G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$G(s) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{s\lambda}$$

$$G(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

Fonctions génératrices usuelles

Loi Géométrique

Si $X \simeq G(p)$ alors $R \neq +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R}\ G(s) = \frac{ps}{1-qs} \text{ avec } q = 1-p \text{ et } |s| < \frac{1}{p}$$

Fonctions génératrices et indépendance

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes $X : \Omega \leftrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \leftrightarrow \mathbb{N}$ alors :

$$\forall s \in [-1, 1] \quad G_{X+Y}(s) = G_X(s).G_Y(s)$$

Remarque

L'un des principaux intérêt de la fonction génératrice est qu'elle permet très facilement de caractériser la loi de la somme de variables aléatoires entières indépendantes.

Exemple

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et de paramètre $\mu > 0$, déterminer la loi de $X + Y$.

Proposition

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées et N une variable aléatoire entière indépendante de la suite. On pose :
$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \qquad N \in \mathbb{N} \quad S = 0 \qquad N = 0$
alors

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s))$$

Preuve

La somme S est doublement aléatoire car les X_i sont aléatoires mais l'indice terminal de sommation N est aussi aléatoire. Pour effectuer le calcul, on va donc décomposer l'espérance donnant la fonction génératrice de S sur les valeurs prises par cet indice en remarquant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} = 1$ puis utiliser les propriétés d'indépendance entre les différentes variables aléatoires. Ainsi
$G_S(s) = E(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} s^S) = P(N = 0) + \sum_{n\in\mathbb{N}^\times} E(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} \prod_{i=1}^{n} s^{X_i})$
$G_S(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(N = n) g_{X_1}(s)^n = G_N(G_{X_1}(s))$

Exemple

Supposons que le nombre d'oeufs pondus par une poule soit une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notons $K = X_1 + X_2 + ... + X_N$ la variable aléatoire donnant le nombre de poussins obtenus où $X_i = 1$ si il y a éclosion de l'oeuf et 0 sinon. Déterminer la loi de K.