# TD : Couple de vecteurs discrets

**Exercice 1 : Couple de vecteurs**
La loi jointe du vecteur $(X, Y)$ est donnée ci-dessous

| X Y | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| 2 | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.1 |
| 3 | 0.1 | 0.0 | 0.2 | 0.0 |

1. Donner les lois marginales de $X$ et $Y$.
2. Les variables $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?
3. Calculer $P(XY = 6)$.
4. Déterminer la covariance.

**Exercice 2 : Le ski**
Dans une station de ski, on peut se rendre aux départs respectifs de deux pistes A et B par deux remontées mécanqiues qui partent du même point D de la station.
Le nombre de skieurs qui se présentent en D pendant une heure est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
On admet qu'on a atteint un régime stable tel que chacun des skieurs choisit indépendamment de sprécédents, A ou B avec de sprobabilités fixes $p$ et $q = 1 - p$.
On note $X$ la variable aléatoire indiquant le nombre de skieurs qui choisissent la piste A pendant une heure.

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(X, Y)$ en calculant pour $k$ et $n$ entiers : $P(X = k \cap N = n)$. (Remarque : quelle condition a t'on sur les entiers $n$ et $k$)
2. Déterminer la loi marginale de $X$ en calculant, pour tout entier $k$ $P(X = k)$. De quelle loi s'agit il ?
3. Calculer le nombre moyen de skieurs se présentant en une heure au départ de la piste A.

**Exercice 3 : Autour de la loi géométrique**
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^{\times}$, telles que :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

pour tous i,j de $\mathbb{N}^{\times}$.

1. Calculer $a$.
2. Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$.
3. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 4 : La Marguerite**
En terminant d'effeuiller la marguerite, on compte : 1 point pour un peu, 3 points pour beaucoup, 5 points pour passionnément, 10 points pour à la folie, 0 points pour pas du tout. On effeuille successivement deux marguerites. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de points obtenu avec la première marguerite. Soit $Y$ la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$
2. Préciser les lois marginales de $X$ et de $Y$. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?
3. Déterminer la distribution de $Z = X + Y$
4. Déterminer la distribution de $T = XY$
5. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$, $E(X+Y)$, $V(X+Y)$, $E(XY)$, $V(XY)$, $Covar(X, Y)$, $r$.

**Exercice 5 : Autour de la somme**

1. Démontrer l'identité suivante sur les coefficients binomiaux appelée Identité de Vandermonde :
$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$$
2. En déduire que Si $X \simeq B(n, p)$ et $Y = \simeq B(m, p)$ avec $X$ et $Y$ indépendantes, alors
$$X + Y \simeq B(n+m, p)$$