# Variables Aléatoires

SR

# Un cas limite de la loi binomiale : Processus de Poisson

- Soit 1 une unité de temps formel divisée en une succession de $n$ intervalles égaux $\Delta t$
- si à l'intérieur de chacun de ces intervalles, la probabilité qu'un évènement E se produise vérifie $p = \lambda \Delta t$ ($p$ est donc proportionnelle à $\Delta t$ car $\lambda$ est une constante)
- si l'évènement E ne peut se produire qu' une fois au plus à l'intérieur de chacune des $n$ périodes, l'arrivée de ce succès étant indépendante du précédent
- si $X$ est la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où l'évènement $E$ se réalise, $X \simeq B(n, \lambda \Delta t)$, approchée par une loi de Poisson de paramètre $n\lambda\Delta t = \lambda$

# Un cas limite de la loi binomiale : Processus de Poisson

Ainsi

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^k}{k!}$$

.

Justifier l'expression obtenue.

# Preuve

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

# Preuve

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

# Preuve

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

# Preuve

$$= \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

# Preuve

$$= \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n})}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{i}{n}) = 1$$

# Preuve

$$\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} = \lim_{n \to +\infty} e^{-kln(1-\frac{\lambda}{n})} = 1$$

# Preuve

$$\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} = \lim_{n \to +\infty} e^{-k ln(1 - \frac{\lambda}{n})} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n} = \lim_{n \to +\infty} e^{n ln(1 - \frac{\lambda}{n})} = e^{-\lambda} \quad \text{DL}$$

# Preuve

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} = \lim_{n\to+\infty} e^{-kln(1-\frac{\lambda}{n})} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{nln(1-\frac{\lambda}{n})} = e^{-\lambda} \quad \mathrm{DL}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

# Bilan des conditions requises pour un processus de Poisson

Les conditions requises sont :

- Il est très rare d'avoir deux succès simultanément.
- Le nombre moyen de succès pendant une période de temps T ne dépend que de la durée T.
- L'arrivée d'un succès est indépendante du précédent.

# Lois usuelles : Loi de Poisson

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$X \simeq P(\lambda)$$

# Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson en pratique

Si $n$ est grand et $p$ assez petit, on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de même espérance mathématique $\mathcal{P}(\lambda)$.
On admet souvent que cette approximation est satisfaisante lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$ avec $np \leq 10$.
Mais il s'agit d'une convention, qui peut varier selon les auteurs. L'intèrêt d'une telle approximation apparait quand les calculs sont plus simples

# Exemple

Par exemple, avec la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.05)$ on a :

$$P(X = 4) = \binom{100}{4}(0.05)^4(0.95)^{96} \simeq 0.178$$

et si nous l'approchons par une loi de Poisson de paramètre 5 :

$$P(X = 4) = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \simeq 0.175$$

Avec un temps de calcul réduit, on obtient une valeur numérique très satisfaisante.

# Exemple

On admet que pour un type d'équipement informatique la durée de vie moyenne exprimée en années est de 3 ans. Calculer la probabilité pour que la durée de vie soit strictement supérieure à 1.

# Exemple

On admet que pour un type d'équipement informatique la durée de vie moyenne exprimée en années est de 3 ans. Calculer la probabilité pour que la durée de vie soit strictement supérieure à 1.

$X \simeq \mathcal{P}(3) \quad P(X > 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3}$

# Exemple

L'opératrice d'un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.

1. Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 5 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que ce nombre d'appels dépasse 15 ?

# Exemple

On divise l'intervalle de temps : 1 min en $n = 60s$ et à chaque seconde soit il y un appel soit il n'y en a pas : avec $p = \frac{2}{60} = 130$ donc la va comptant le nb d'appels reçus en $1s$ suit une loi binomiale de paramètres $p = 1/30$ et $n = 60$. Nous pouvons approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. Par le même raisonnement en 5 min, le nombre d'appels reçus sut une loi de Poisson de paramètre 10. (car 10 appels en 5 min i.e 10 appels en 300 secondes.)

# Exemple

On divise l'intervalle de temps : 1 min en $n = 60s$ et à chaque seconde soit il y un appel soit il n'y en a pas : avec $p = \frac{2}{60} = 130$ donc la va comptant le nb d'appels reçus en $1s$ suit une loi binomiale de paramètres $p = 1/30$ et $n = 60$. Nous pouvons approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. Par le même raisonnement en 5 min, le nombre d'appels reçus sut une loi de Poisson de paramètre 10. (car 10 appels en 5 min i.e 10 appels en 300 secondes.)

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

# Espérance d'une v.a.d

On dit que $X$ est intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| p_X(x) < +\infty$$

# Espérance d'une v.a.d

On dit que $X$ est intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de $X$ notée $E(X)$ est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

# Espérance d'une v.a.d

On dit que $X$ est intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de $X$ notée $E(X)$ est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Elle correspond à la valeur moyenne

# Espérance d'une v.a.d

On dit que $X$ est intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de $X$ notée $E(X)$ est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Elle correspond à la valeur moyenne
Dans notre exemple,

$$E(X) = 0 * \frac{6}{36} + 1 * \frac{10}{36} + 2 * \frac{8}{36} + 3 * \frac{6}{36} + 4 * \frac{4}{36} + 5 * \frac{2}{36} = \frac{70}{36}$$

# Exemple pour Bernouilli

$$E(X) = 0 * (1 - p) + 1 * p = p$$

# Exemple pour Poisson

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

# Exemple pour Poisson

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

# Preuve pour le calcul de l'espérance d'une loi binomiale

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (1-p)^n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (\frac{p}{1-p})^k = (1-p)^n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (\frac{p}{1-p})^k$$

# Preuve pour le calcul de l'espérance

$$E(X) = (1-p)^n \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (\frac{p}{1-p})^{k-1}$$

$$E(X) = (1-p)^n \frac{p}{1-p} n(1 + \frac{p}{1-p})^{n-1} = np$$

# Propriété de l'espérance

Si $a$ et $b$ sont des réels et $X$ une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ alors

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

(L'espérance est un opérateur linéaire.)

# Remarque

L'espérance mathématique ne suffit pas à décrire une variable aléatoire discrète : en effet soit $X$ la variable aléatoire mesurant le gain d'un joueur lors d'une loterie comportant 1000 numéros faisant tous gagner 5 euros, et soit $Y$ son an analogue dans une loterie de 1000 numéros dont un seul est gagnant et fait gagner 5000 euros. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$, qu'en concluez vous ?

# Remarque

L'espérance mathématique ne suffit pas à décrire une variable aléatoire discrète : en effet soit $X$ la variable aléatoire mesurant le gain d'un joueur lors d'une loterie comportant 1000 numéros faisant tous gagner 5 euros, et soit $Y$ son an analogue dans une loterie de 1000 numéros dont un seul est gagnant et fait gagner 5000 euros. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$, qu'en concluez vous ?
$E(X) = 1 * 5 = 5$ $E(Y) = \frac{1}{1000} * 5000 + \frac{999}{1000} * 0 = 5$
$E(X) = E(Y)$ pourtant $X$ et $y$ ne sont pas les mêmes variables aléatoires

# Moment d'ordre $p$ d'une v.a.d

On dit que $X$ est de puissance $p$-intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x^p| p_X(x) < +\infty$$

# Moment d'ordre $p$ d'une v.a.d

On dit que $X$ est de puissance $p$-intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x^p| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de $X^p$ notée $E(X)$, appelée moment d'ordre $p$ est définie par :

$$E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$$

# Moment d'ordre $p$ d'une v.a.d

On dit que $X$ est de puissance $p$-intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x^p| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de $X^p$ notée $E(X)$, appelée moment d'ordre $p$ est définie par :

$$E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$$

Par exemple, si $X$ est de carré intégrable alors

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$$

# Variance d'une variable aléatoire

Soit $X$ une variable aléatoire de carré intégrable

# Variance d'une variable aléatoire

Soit $X$ une variable aléatoire de carré intégrable
La variance de $X$ est le nombre réel positif donné par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(x))^2 P(X = x)$$

# Variance d'une variable aléatoire

Soit $X$ une variable aléatoire de carré intégrable
La variance de $X$ est le nombre réel positif donné par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(x))^2 P(X = x)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$$

# Variance d'une variable aléatoire

Soit $X$ une variable aléatoire de carré intégrable
La variance de $X$ est le nombre réel positif donné par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(x))^2 P(X = x)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$$

Si $X$ est de carré intégrable alors pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

# Variance de l'exemple introductif

$$E(X) = 0^2 * \frac{6}{36} + 1^2 * \frac{10}{36} + 2^2 * \frac{8}{36} + 3^2 * \frac{6}{36} + 4^2 * \frac{4}{36} + 5^2 * \frac{2}{36} = \frac{210}{36}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 2.06$$

# Signification concrète de la variance

Il s'agit d'une mesure de la dispersion des valeurs prises par la variable, dispersion autour de son espérance (sa moyenne) et en tenant compte des probabilités d'apparition des valeurs.

# Moments des lois usuelles

| Nom | Loi | $P(X=k)$ | $E(X)$ | $Var(X)$ |
|---|---|---|---|---|
| Uniforme | $\mathcal{U}(n)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |
| Bernoulli | $\mathcal{B}(p)$ | $P(X=1)=p$ | $p$ | $p(1-p)$ |
| Binomiale | $\mathcal{B}(n,p)$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| Géométrique | $\mathcal{G}(p)$ | $p(1-p)^{k-1}$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| Poisson | $\mathcal{P}(p)$ | $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |

# Exemples : Loi de Bernoulli

$$X \simeq B(p)$$

# Exemples : Loi de Bernoulli

$$X \simeq B(p)$$

$$E(X) = 1 * p + 0(1 - p) = p$$

# Exemples : Loi de Bernoulli

$$X \simeq B(p)$$

$$E(X) = 1 * p + 0(1-p) = p$$

$$E(X^2) = 1^2 p + 0^2 (1-p)$$

# Exemples : Loi de Bernoulli

$$X \simeq B(p)$$

$$E(X) = 1 * p + 0(1-p) = p$$

$$E(X^2) = 1^2 p + 0^2(1-p)$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

# Fonction de répartition d'une v.a.d

Soit $X$ une v.a.d, sa fonction de répartition est définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \; F_X(a) = P(X \leq a)$$

# Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a.d $X$ vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fonction en escalier

# Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a.d $X$ vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fonction en escalier
- $a < b \quad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

# Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a.d $X$ vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fonction en escalier
- $a < b \quad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- Elle est continue à droite

# Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a.d $X$ vérifie les propriétés suivantes :

- C'est une fonction en escalier
- $a < b \quad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- Elle est continue à droite
- $lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0 \ lim_{a \to +\infty} F_x(a) = 1$

# Remarque : fonction de répartition

Si on connait la loi de $X$, il est facile de calculer la fonction la fonction de répartition :

$$F(x) = \sum_{x_i \in X(\Omega) \quad x_i \leq x} P(X = x_i)$$

# Remarque : fonction de répartition

Réciproquement si on connait la fonction de répartition, il est facile de retrouver la loi. Supposons par exemple que dans $X(\Omega)$, les $x_i$ soient rangés par ordre croissant,
$F(x_i) = P(X \leq x_i) = P(X \leq x_{i-1} \quad \text{ou} \quad X = x_i) = P(X \leq x_{i-1} + P(X = x_i) = F(x_{i-1} + P(X = x_i)$
d'où

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

# Fonction de répartition de l'exemple introductif

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X(\omega)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $p_X$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| $F(X)$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{16}{36}$ | $\frac{24}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{34}{36}$ | 1 |

# Loi conditionnelle

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes prenant un nombre dénombrable de valeurs, alors la loi conditionnelle de $Y$ sachant $(X = x)$ est donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \text{tel que} \quad P(X = x) > 0$$

$$P_{Y/X=x}(y) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(X = x)}$$

$$E(Y/X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P_{Y/X=x}(y)$$

# Exemple

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires. On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et que la loi de $Y$ conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Quelle est la loi de Y ?

# Exemple

On remarque d'abord que $Y$ est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k/X = n)P(X = n)$$

# Exemple

On remarque d'abord que $Y$ est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=k/X=n)P(X=n)$$

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

# Exemple

On remarque d'abord que $Y$ est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=k/X=n)P(X=n)$$

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$P(Y=k)=\frac{p^k e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k} q^{n-k}}{(n-k)!}$$

# Exemple

$$P(Y = k) = \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} e^{\lambda q}$$

# Exemple

$$P(Y=k)=\frac{p^k e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}e^{\lambda q}$$

$$P(Y=k)=\frac{e^{-p\lambda}(\lambda p)^k}{k!}$$

# Fonction caractéristique : Définition

On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète $X$ :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)e^{itk}$$

# Propriétés de la fonction caractéristique

- $\phi_X$ caractérise la loi de $X$ ce qui veut dire que si $\phi_X = \phi_Y$ alors $X$ et $Y$ ont même loi
- $\forall n \geq 1$, si $E[|X|^n] < +\infty$ alors $\phi_X$ est dérivable jusqu'à l'ordre $n$ et $\forall 1 \leq k \leq n$

$$\phi_X^{(k)}(t) = i^k E[X^k e^{itX}]$$

$$\phi^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$

# Fonctions caractéristiques usuelles

- Pour la Loi de Bernoulli

$$X \simeq B(p)$$

$$\phi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$$

- Loi Binomiale

$$X \simeq B(n, p)$$

$$\phi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

# Fonctions caractéristiques usuelles

- Pour la Loi de Poisson

$$X \simeq \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

- Pour la loi géométrique

$$X \simeq G(p)$$

$$\phi_X(t) = pe^{it}\frac{1}{1-(1-p)e^{it}}$$

- Déterminer l'expression de la fonction caractéristique pour une loi binomiale
- En utilisant cette expression, retrouver la formule de l'espérance et de la variance de $X$.

$$\phi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

$$\phi^{'} i_X(t) = nipe^{it}(1 - p + pe^{it})^{n-1}$$

$$iE(X) = \phi^{'}(0) = nip * 1$$

# Fonction gnératrice

Soit $X$ une v.a discrète définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **fonction génératrice associée à $X$ la fonction $G_X$ définie par lorsqu'elle existe :**

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P(X = n)$$

# Propriétés de la fonction génératrice

- $G_X$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. $G_X$ est bien définie sur $[-1, 1]$.
- $G_X$ est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et infiniment dérivable sur $]-1, 1[$.
- $G_X$ caractérise la loi de $X$ : deux variables aléatoires ayant même fonction génératrice ont même loi. En particulier :

$$P(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0)$$

.

# Propriétés de la fonction génératrice

- $\forall k \geq 1$, $E(X^k)$ est finie si et seulement si $G_x$ admet une dérivée d'ordre $k$ au point 1. Dans ce cas

$$G_X^{(k)}(1) = E[X(X-1)...(X-k+1)]$$

En particulier,

$$G_X^{'}(1) = E(X)$$

$$G_X^{''}(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

$$Var(X) = G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1)(1 - G_X^{'}(X))$$

.

# Fonctions génératrices usuelles

- Loi de Bernoulli
  Pour $X \simeq B(p)$ alors $n \geq 2$ $P(X = n) = 0$ donc $X$ est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R} \; G(s) = 1 - p + sp$$

- Loi Binomiale
  Pour $X \simeq B(n, p)$ alors $X$ est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R} \; G(s) = (1 - p + sp)^n$$

# Fonctions génératrices usuelles

- Loi de Poisson
  Pour $X \simeq P(\lambda)$ alors $X$ est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R} \; G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$G(s) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{s\lambda}$$

$$G(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

# Fonctions génératrices usuelles

- Loi géométrique
  Si $X \simeq G(p)$ alors $R \neq +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R} \; G(s) = \frac{ps}{1-qs} \text{ avec } q = 1-p \text{ et } |s| < \frac{1}{p}$$

# Fonction génératrice et indépendance

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes $X : \Omega \leftrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \leftrightarrow \mathbb{N}$ alors :

$$\forall s \in [-1, 1] \quad G_{X+Y}(s) = G_X(s).G_Y(s)$$

# Exemple

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et de paramètre $\mu > 0$, déterminer la loi de $X + Y$.

# Proposition

Soit $(X_i)$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées et $N$ une variable aléatoire entière indépendante de la suite. On pose :
$S = X_1 + X_2 + ... + X_N \quad \text{si} \quad N \in \mathbb{N} \quad S = 0 \quad \text{si} \quad N = 0$
alors

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s))$$

# Exemple

La somme $S$ est doublement aléatoire car les $X_i$ sont aléatoires mais l'indice terminal de sommation $N$ est aussi aléatoire. Pour effectuer le calcul, on va donc décomposer l'espérance donnant la fonction génératrice de $S$ sur les valeurs prises par cet indice en remarquant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} = 1$ puis utiliser les propriétés d'indépendance entre les différentes variables aléatoires. Ainsi
$G_S(s) = E(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} s^S) = P(N = 0) + \sum_{n\in\mathbb{N}^\times} E(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} \prod_{i=1}^n s^{X_i})$
$G_S(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(N = n) g_{X_1}(s)^n = G_N(G_{X_1}(s))$

# Exemple

Supposons que le nombre d'oeufs pondus par une poule soit une variable aléatoire $N$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notons $K = X_1 + X_2 + ... + X_N$ la variable aléatoire donnant le nombre de poussins obtenus où $X_i = 1$ si il y a éclosion de l'oeuf et 0 sinon. Déterminer la loi de $K$

# Exemple

$$G_K(s) = G_N(G_{X_1}(s))$$

$$G_{X_1}(s) = 1 - p + sp$$

$$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

$$G_K(s) = G_N(G_{X_1}(s)) = e^{\lambda(G_{X-1}(s)-1)} = e^{\lambda p(s-1)}$$