Probabilités

INSA Centre Val de Loire

3.2

Table des matières

1 Progression 2A

- semaine 40
- CM1 : Dénombrement

- semaine 41
  - TD1 : Dénombrement

- semaine 42
  - CM2 : Calculs de Probabilités
  - TD2 : Calculs de probas (Exos 1 à 4)

- semaine 43
  - CM3 : Calculs de Probas
  - TD3 : td probas

- semaine 45
  - TD4 : td probas et probas conditionnelles
  - TD 5 : td probas conditionnelles

- semaine 46
  - CM4 : Variables aléatoires Discrètes
  - TD6 : vad

- semaine 47
  - CM5 : vad
  - TD7 : vad

- semaine 48
  - CM6 : **Test 1** (mardi 28 novembre à 11h/12h20)
  - TD8 : vad

- semaine 49
  - TD9 : vad
  - CM7 : Vac

- semaine 50
  - CM8 : Vac
  - TD10 : vac

- semaine 1
  - TD11 : vac
  - CM9 : Couples Aléatoires Discrets
  - TD12 : vecteurs discrets

- semaine 2
  - **Test 2** (hors maquette, mardi 9 janvier 13h30 14h -15h20)

2 Cours 1 : Dénombrement

2.1 Généralités sur les ensembles finis

Definition 1. Ensembles équipotents

1. Un ensemble E est dit **équipotent** à un ensemble F s'il existe une bijection de E dans F.
2. Un ensemble E est dit **fini** si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit équipotent à $F_n = \{1, 2, ..., n\} \quad n \in \mathbb{N}^{\times}$ et $F_0 = \emptyset$
3. Un ensemble est dit **infini** lorsqu'il n'est pas fini.
4. Si E est un ensemble fini, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ unique tel que E soit équipotent à F_n, n s'appelle le **cardinal** de E et est noté $Card(E)$.
5. Un ensemble est dit **dénombrable** lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Definition 2. Propriétés des cardinaux (Rappels) Soient E et F deux ensembles finis, A un sous ensemble de E, alors :

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

$$Card(C_E(A)) = Card(E) - Card(A)$$

Exemple 1.

1. Un lycée comporte deux classes préparatoires, 55 élèves ont pour langues anglais, allemand, 60 élèves ont pour langues anglais, espagnol et 15 étudient les trois langues. Combien y at'il d'élèves en classe prépa ?
2. Une autoroute possède trois sorties principales et chacune de ces sorties principales possède elle-même deux sorties secondaires. De combien de façon Monsieur Dupont peut il sortir de cette autoroute ?
3. Un jeu de cartes comporte 32 cartes, on tire successivement et sans remise 3 cartes. De combien de façons peut on obtenir au moins trois coeurs.

Remarque 1. Exemples et remarques

— $\mathbb{N}$ est dénombrable

— $\mathbb{Z}$ est dénombrable car équipotent à $\mathbb{N}$ et contient strictement $\mathbb{N}$.
On trouve là un paradoxe qui concerne les ensembles infinis : en effet des ensembles infinis peuvent être équipotents et donc intuitivement avoir le même nombre d'éléments et en même temps être strictement inclus l'un dans l'autre ce qui correspondrait intuitivement à ce que l'un soit plus grand que l'autre. Donc quant on passe aux ensembles infinis, l'intuition se trouble.

Exemple 2. Justifier que les applications suivantes sont bien des bijections :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ & & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & & 2n & \mapsto & -n \\ & & 2n+1 & \mapsto & n+1 \end{array}$$

2.2 Echantillons

Definition 3. On se place dorénavant dans un ensemble E **fini**, E est appelé population. On note n son cardinal et on va s'intéresser à des objets appelés échantillons que l'on va définir au cas par cas.

2.2.1 Echantillons ordonnés avec répétitions

Theoreme 1. Echantillons ordonnés avec répétitions

1. *Exemple type* : On prend pour E l'ensemble des lettres de l'alphabet, un échantillon ordonné avec répétitions de longueur 3 est une liste de 3 lettres (qui n'a pas forcément de sens), ainsi par exemple AAA, ABD,DBA sont des échantillons ordonnées de longueur 3.
2. *Définition* : un échantillon ordonné avec répétitions de longueur p est un p-uplet à valeurs dans E.
3. *Remarque* : Cela correspond à une application de $\{1, 2, ..., p\}$ dans $\{1, 2, ..., n\}$.
4. *Propriété* : Le nombre d'échantillons avec répétitions de longueur p sur E est égal à n^p.

Notation

Un p-uplet est noté en utilisant des parenthèses. Lorsque $p = 2$, il est appelé couple : ainsi $(2, 3)$ est un couple différent de $(3, 2)$.

Exemple 3. Une urne contient 10 boules rouges et 2 blanches. On prélève successivement et avec remise 5 boules de l'urne, quel est le nombre de tirages possibles ?

2.2.2 Echantillons ordonnés sans répétition

Theoreme 2. Echantillons ordonnés sans répétitions

1. *Exemple type* : On prend pour E l'ensemble des chevaux au départ d'une course. Contrairement à l'exemple précédent, un même cheval ne peut se trouver à plusieurs places différentes à l'arrivée. Si au départ nous avions 15 chevaux, nous aurons $15 * 14 * 13$ podiums.
2. *Définition* : un échantillon ordonné sans répétition de longueur p sur E est un p-uplet dont tous les éléments sont différents. Il faut donc que $p \leq n$. Un tel échantillon est appelé **arrangement** de longueur p.
3. *Propriété* : Le nombre d'échantillons sans répétition de longueur p sur E est égal à $0 \quad \text{si}\, p > n \qquad A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$sinon.

Remarque 2. Lorsque $p = n$, un tel échantillon est est aussi appelé **permutation** cela correspond alors à une bijection de E dans lui-même. Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n et vaut donc $n!$.

Un arrangement correspond au nombre d' applications injectives de $\{1, 2, ..., p\}$ dans $\{1, 2, ..., n\}$.

Exemple 4.

1. Une étagère contient 7 livres tous distinguables par leur tranche. De combien de façons peut on ranger ces livres sur l'étagère ?
2. Une urne contient 10 boules rouges et 2 blanches. On prélève successivement et sans remise 5 boules de l'urne, quel est le nombre de tirages possibles ?

2.2.3 Echantillons non ordonnés sans répétition

Theoreme 3. Echantillons non ordonnés sans répétition

1. *Exemple type* : le tirage du loto, on tire 5 boules au hasard dans une urne de 49. Il y a donc $\dfrac{49 * 48 * 47 * 46 * 45}{5!}$ tirages possibles.
2. *Définition* : un échantillon non ordonné sans répétition de cardinal p sur E est un sous-ensemble de taille p de E (donc $p \leq n$). Un tel sous-ensemble est appelé **combinaison**.
3. *Propriété* : Le nombre de combinaisons de taille p est égal à $0 \,\text{si}\, p > n \quad \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \,\text{si}\, p \leq n$.

Notation : Un ensemble ou sous-ensemble est noté avec les accolades. Un sous-ensemble de cardinal 2 *est appelé paire. Par exemple* $\{2, 5\}$ *est une paire d'entiers et* $\{2, 5\} = \{5, 2\}$

Exemple 5.

1. Dans une classe de quinze élèves, on veut élire un comité de trois élèves. Combien y a t'il de possibilités ?
2. On se donne dans le plan n droites distinctes "en position générale", $n \geq 4$, en combien de points ces droites se coupent elles.

Proposition 4. Combinaisons : Propriétés

1. $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Démonstration. Démontrer les propriétés précédentes de façon arithmétique puis en utilisant le dénombrement.

$\square$

Proposition 5. La Formule du binôme de Newton et corollaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, A un anneau tel que $xy = yx$, alors on a :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

avec $x^0 = y^0 = 1$.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (-1^k) \binom{n}{k} = 0$

Démonstration. On peut procéder par récurrence sur n ou alors :lorsque l'on développe $(a+b)(a+b)(a+b)...(a+b)$ tous les termes que l'on obtient sont de la forme $a^k b^{k'}$ avec $k+k'=n$. Le coefficient de $a^k b^{n-k}$ est égal au nombre de façons de choisir les k facteurs dans lesquels on prend la a, i.e $\binom{n}{k}$. Notons que c'est aussi le nombre de façons de choisir les $n-k$ facteurs dans lesquels on prend le b.

cas particulier avec $a = 1 = b$. On peut aussi retrouver cette propriété à l'aide d'un dénombrement : intéressons nous au nombre de codes à n chiffres ne comportant que des 0 et des 1 : évidemment 2^n mais c'est aussi le nombre de codes à n chiffres comportant exactement k fois la valeur 1 et $n-k$ fois la valeur 0 ceci pour $k = 0$ à n. Or le nombre de codes à n chiffres comportant exactement k fois la valeur 1 est $\binom{n}{k}$.

□

2.2.4 Echantillons non ordonnés avec répétitions

Theoreme 6. Echantillons non ordonnés avec répétitions

1. *Exemple type* : on lance quatre dés identiques. Combien y a t'il de résulats possibles . Pour dénombrer le nombre de tirages possibles, on commence par définir une façon de caractériser le tirage : ainsi le résultat "on a obtenu 1 fois la face 1, 2 fois la face 3 et 1 fois la face 5" est caractérisé par le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6
$*$		$**$		$*$	

et donc la formule suivante : $*| \quad |**| \quad |*|$
Nous avons 4 * et 5 séparateurs, il suffit donc de compter le nombre de façons de disposer les * parmi les $4+5$ "places" possibles : à savoir $\binom{9}{4} = 126$.

Theoreme 7. Echantillons non ordonnés avec répétitions

1. *Définition* : On appelle **échantillon non ordonnée avec répétitions** de p éléments de E toute liste de p éléments de E **non ordonnés distincts ou non** Notons S_n^p le nombre de tels échantillons.. Un tel ensemble est aussi appelé combinaison avec répétitions.
2. *Propriété* : le nombre d'échantillons ordonnés avec répétitions de taille p est égal à
$$S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$
.

Démonstration. Justification de la formule

De façon plus générale

$$xxx| \quad |x| \quad |x|............| \quad |xx| \quad |$$

Nous avons p croix, n cases et $n-1$ séparations $|$

Une combinaison avec répétitions est donc en fait une liste comportant p croix et $n-1$ séparateurs $|$, donc $n+p-1$ éléments.

Il s'agit dès lors de choisir les p places des x parmi les $n+p-1$ "places" au total :

$$S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

□

Exemple 6. Si $A = \{a, b, c, d\}$, déterminer les combinaisons avec répétitions de deux éléments de A, les expliciter.

2.3 Bilan

Bilan : Les questions à se poser

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions suivantes :

1. Quel est le nombre n d'objets de référence ?
2. Quel est le nombre p d'objets concernés par la situation ?
3. Les p-objets sont ils considérés sans ordre (en vrac : tirage simultané ou avec ordre (c'est-à-dire que la situation est différente si les mêmes p-objets sont classés de façon différente) ?
4. Les répétitions sont elles impossibles (les p-objets sont tous distincts tirage sans remise) ou possibles (tirage avec remise) ?

Bilan : Tableau récapitulatif

	sans répétition	avec répétitions
avec ordre	A_n^p	n^p
sans ordre	$\binom{n}{p}$	$\binom{n+p-1}{p}$

Exemple 7. Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On pioche successivement 3 boules de l'urne et sans remise.

1. Combien y a t'il de tirages possibles ?
2. Combien y a t'il de tirages tels que la troisième boule obtenue porte le numéro 2 ?
3. Combien y a t'il de tirages tels que la troisième boule obtenue porte un numéro pair ?
4. Mêmes questions si on pioche successivement avec remise 3 boules de l'urne.

3 TD1 : Dénombrement

3.1 Exercice 1 : Les Coureurs

Huit coureurs viennent de terminer un cent mètres.

— Combien y a t'il de classements possibles ?
— Combien y a t'il de podium possible ?

3.2 Exercice 2 : Anagrammes

Quel est le nombre d'anagrammes

1. du mot "PROBAS"
2. et du mot "STATS" ?

(On ne demande pas que le mot obtenu ait un sens)

3.3 Exercice 3 : Contrôle de qualité

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, on en prélève simultanément 4.

1. Combien de prélèvements différents peut on obtenir ?
2. On suppose que sur les 20 pièces, 4 sont défectueuses. Quel est alors le nombre de prélèvements où
   (a) les quatre pièces son bonnes ?
   (b) au moins une pièce est mauvaise ?
   (c) une pièce et une seule est mauvaise ?
   (d) deux pièces au moins sont mauvaises ?

3.4 Exercice 4 : Des journaux dans des casiers

On désire répartir six journaux dans 11 casiers nominatifs. De combien de façon peut on le faire dans chacun des cas suivants :

1) Chaque casier peut contenir au plus un journal et
   a) Les journaux sont distincts
   b) Les journaux sont identiques
2) Chaque casier peut contenir un nombre quelconque de journaux et
   a) Les journaux sont distincts

3.5 Exercice 5 : Autour du dénombrement

Démontrer par un dénombrement que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

3.6 Exercice 6 : les Livres

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement : nous supposerons à cet effet que tous les livres d'une matière sont distincts.

- si les livres doivent être groupés par matières.
- si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés

4 Cours 2 et 3 : Calcul de Probabilités

4.1 Vocabulaire

Definition 4.

1. On appelle **expérience aléatoire** $\mathcal{E}$ une expérience dont l'issue est aléatoire. Cette issue est imaginable, observable mais imprévisible

   Jeter un dé, jouer à pile ou face, tirer des cartes dans un jeu de cartes, jouer au loto...
2. On appelle **univers des possibles** Ω l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience, Ω peut être fini ou non.
   $\mathcal{E}$: jeter une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention d'un pile", $\Omega = \{P, FP, FFP, ...\}$, Ω est infini mais dénombrable (car on a une bijection entre $\mathbb{N}^{\times}$ avec la place du pile) A : obtenir un pile en au plus quatre lancers $A\{P, FP, FFP, FFFP\}$ est un évènement de cette expérience aléatoire
3. On appelle **événement élémentaire** tout élément de Ω
   $\{2\}$ *est un événement élémentaire car singleton de* Ω
4. On appelle **événement** toute partie de Ω
   Obtenir un nombre pair est un événement de Ω, en effet $A = \{2, 4, 6\}$
5. **Un singleton** $\{\omega\}$ est un événement élémentaire
6. Ω est **l'événement certain** car il est toujours réalisé
7. $\emptyset$ est **l'événement impossible** car il n'est jamais réalisé
8. $\bar{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
9. $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A ET B sont réalisés simultanément.
10. Si $A \cap B = \emptyset$ alors la réalisation simultanée de A et B est impossible, nous dirons que les évènements A et B sont **blue**incompatibles
11. Plus généralement $\cap_i A_i$ est réalisé si et seulement si tous les évènements A_i sont réalisés.
12. $A \cup B$ est réalisé si et seulement si au moins un des évènements est réalisé.
13. Plus généralement $\cup_i A_i$ est réalisé si et seulement si au moins un des évènements A_i est réalisé.
14. Propriétés de l'union et de l'intersection :
    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$
15. Inclusion :
    L'événement $A \subseteq B$ signifie que la réalisation de A implique la réalisation de B.
16. Evènement A privé de B : $A \backslash B = \{\omega \in A \quad \omega \notin B\}$

Definition 5. Partition de Ω
Une partition de Ω est un système complet d'événements. Autrement dit, des événements $(A_i)_i$ forment un système complet d'événements si :

1. sont différents de $\emptyset$,
2. deux à deux incompatibles
3. et si $\cup A_i = \Omega$

4.2 Espaces probabilisables

4.2.1 Généralités

*Connaissant Ω l'univers des possibles, on cherche à attribuer une **mesure** à toute partie de Ω, cette mesure va être appelée **mesure de probabilité** et doit respecter certaines règles simples de calcul. La mesure de probabilités ne va pas être définie directement sur Ω mais sur une **tribu**.*

Definition 6. Tribu
Ω étant un ensemble, on appelle **une σ-algèbre** sur Ω une famille $\mathcal{T}$ de parties de Ω telles que :

i) $\Omega \in \mathcal{T}$
ii) si $A \in \mathcal{T}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$
iii) si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \in \mathcal{T}$ alors $\cup_n A_n \in \mathcal{T}$

Definition 7. Espace Probabilisable

1. **Un espace probabilisable** est un couple $(\Omega, \mathcal{T})$ constitué de l'univers des possibles Ω muni d'une tribu $\mathcal{T}$
2. Les espaces étudiés seront tous probabilisables
3. Dans la modélisation des phénomènes aléatoires, lorsque Ω est un ensemble **fini ou dénombrable**, la tribu considérée est la tribu, notée $\mathcal{P}(\Omega)$, de toutes les parties de Ω.

Definition 8. Probabilité
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, avec Ω un espace, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.
On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :

i) $P(\Omega) = 1$
ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints :

$$P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \sum_{1}^{+\infty} P(A_n)$$

P est dite σ-additive.

Propriété 1.

i) $P(\emptyset) = 0$
ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
iii) (A, B) étant une partition de Ω, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

iv) Inégalité de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

v) Si $A \subseteq B$ alors

$$P(A) \leq P(B)$$

Exemple 8. Démontrer les propriétés ci-dessus.

4.2.2 Probabilités sur une ensemble fini

Definition 9. Probabilité sur un ensemble fini

Soit Ω un ensemble **fini**, soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
La donnée d'un ensemble $\{p(\omega)\ \omega \in \Omega\}$ vérifiant

i) $\forall \omega \in \Omega\ p(\omega) \geq 0$

ii) $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

va permettre de définir une **une probabilité** sur Ω :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Exemple 9. Dé truqué
On lance un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité de l'événement "le résultat du lancer est i" pour $1 \leq i \leq 6$.

1) Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sachant que $p_2 = p_4$, $p_4 = p_6$, $p_1 = p_3$, $p_3 = p_5$, $p_6 = 2p_5$.
2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : -obtenir un résultat pair -obtenir un résultat impair.

4.2.3 Probabilité Uniforme

Definition 10. Probabilité Uniforme sur un univers Ω fini

Dans toutes les situations où aucun événement élémentaire ne doit être distingué par rapport aux autres, on suppose que tous les événements élémentaires sont **équiprobables**. Sur un univers fini Ω l'hypothèse d'équiprobabilité définit une probabilité P unique dite **probabilité uniforme** sur Ω donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Exemple 10.

1. Dans le cas du lancer d'un dé non truqué, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
2. Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5, on pioche 2 boules dans l'urne, quelle est la probabilité que le premier chiffre soit impair
   — si le tirage est successif sans remise ?
   — si le tirage est successif avec remise ?
3. On lance simultanément deux pièces de monnaie **identiques**. Expliciter l'univers des possibles, Y a t'il équiprobabilité ? Comment modéliser l'expérience pour pourvoir utiliser le théorème sur l'équiprobabilité ? En déduire la probabilité de l'évènement A "on obtient au moins une fois pile".

4.3 Probabilités Conditionnelles

Exemple 11. Exemple Introductif
On lance simultanément deux dés distincts.
Soit A l'événement : "la somme des chiffres obtenus est ≥ 10"
Soit B_k : "le chiffre du premier dé est égal à k".
Déterminer $P(A), P(A/B_k)$

Definition 11. Probabilité conditionnelle
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Si $P(B) > 0$, alors

$$P(./B) : A \mapsto P(A/B)$$

avec

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ceci est la probabilité de A sachant B.

Exemple 12.

Démontrer que la formule précédente définit bien une probabilité sur l'espace Ω.

Proposition 8. Formule des Probabilités composées

Si A et B sont deux évènements de Ω tels que $P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

Généralisation de la formule : si A_1, A_2,...,A_n désignent n évènements de probabilités non nulles alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Exemple 13.

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire, et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

Proposition 9. Formule des probabilités totales

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace probabilisé, $0 < P(A) < 1$, alors :

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$$

Plus généralement, si $(A_n)_n$ désigne une partition dénombrable de Ω, telle que $n \geq 1$ $0 < P(A_n) < 1$ alors

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P(B/A_n)$$

Exemple 14.

1. Démontrer la formule précédente.
2. On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Proposition 10. Formule de Bayes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})}$$

Plus généralement, si $(A_n)_n$ désigne une partition dénombrable de Ω et si $\forall n \; 0 < P(A_n) < 1$ et $P(B) > 0$, alors $\forall k \geq 1$:

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P(B/A_n)}$$

Exemple 15.

Une maladie affecte une personne sur 1000. Un test sanguin détecte la maladie avec une fiabilité de 0.99 quand la maladie est effectivement présente, et nous obtenons un faux positif pour 0.2% des personnes testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade quand le test est positif ?

4.4 Evenements Indépendants

Definition 12. Indépendance de deux évènements

Soient $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, on dit que A et B sont **indépendants** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Il ne faut pas confondre la notion d'indépendance qui porte sur les probabilités et la notion d'ensembles disjoints ou incompatibles i.e. $A \cap B = \emptyset$

Remarque 3.

1. Si A et B sont indépendants, avec $P(B) > 0$ alors $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$
2. Si A et B sont indépendants, alors
   $\bar{A}$ et B
   A et $\bar{B}$
   $\bar{A}$ et $\bar{B}$
   sont indépendants.

Definition 13. Evenements Indépendants

Soit $(A_n)_n$ une partition dénombrable de $\mathcal{A}$

$(A_n)_n$ sont **deux à deux indépendants** si et seulement si $\forall i \geq 1$ $\forall j \geq 1$ distinct,

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$(A_n)_n$ sont **mutuellement indépendants** si et seulement si $\forall k \geq 2$ et pour toute suite $(A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k})$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$$

Exemple 16.

1. Pour trois évènements A, B, C expliciter les conditions de l'indépendance deux à deux puis de l'indépendance mutuelle.
2. Déterminer le nombre de conditions requises par l'indépendance deux à deux, puis par l'indépendance mutuelle pour une famille d en évènements.
3. En déduire quelle propriété est la plus contraignante.

5 TD2, TD3, TD4 et TD5

5.1 Exercice 0 : Ensembles

Soit Ω un univers et A,B et C trois évènements de $Omega$, traduire en terme ensembliste (en utilisant uniquement les symboles d'intersection, de réunion et de passage au complémentaire ainsi que A,B,C) les évènements suivants :

1. Seul A se réalise ;
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent ;
4. au moins l'un des trois événements se réalise ;
5. au moins deux des trois événements se réalisent ;
6. aucun ne se réalise ;
7. au plus l'un des trois se réalise ;
8. exactement deux des trois se réalisent ;

5.2 Exercice 1 : Possible ou Impossible

Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$, peut-on définir une probabilité P sur Ω de sorte que :

$$P(\{1, 2\}) = P(\{2, 3\}) = \frac{1}{3}$$

5.3 Exercice 2 : Dés truqués

On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.

1. Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair.
3. Reprendre les questions si cette fois le dé est pipé de sorte que la probabilité d'une face paire soit le double de la probabilité d'une face impaire.

5.4 Exercice 3 : Déterminer une probabilité

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Déterminer une probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

5.5 Exercice 4 : Composant

Un composant électronique dispose de deux résistances , S_1 et S_2 , qui ont la même probabilité d'être utilisées. La probabilité que l'une des résistances au moins soit utilisée est 0.9 ; celle que les deux soient utilisées vaut 0.5 . Quelle est la probabilité :

1. que la résistance S_1 ne soit pas utilisée ?
2. que les deux résistances ne soient pas utilisées ?
3. que l'une des deux résistances au moins ne soit soit utilisée ?
4. qu'une seule résistance soit utilisée ?

5.6 Exercice 5 : Tirage de boules dans une urne

Une urne contient 10 boules : 7 boules rouges et 3 boules noires indiscernables au toucher.

a) On extrait simultanément 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir 3 boules de la même couleur ?

b) On tire successivement 3 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges et une noire :
-si le tirage s'effectue sans remise ?
-si le tirage s'effectue avec remise ?

c) Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à extraire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir des boules de couleurs différentes (on donnera le résultat sous forme de fractions irréductibles)

5.7 Exercice 6 : Chiffres et jetons

Combien peut on former de nombres de trois chiffres avec les chiffres $1, 2, 3, 4, 5$ le même chiffre pouvant être utilisé plusieurs fois ?
On dispose de 10 jetons : 5 jetons portent le numéro 1, 4 jetons portent le numéro 2 et 1 jeton porte le numéro 3. On tire successivement et sans remise trois jetons.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre dont les trois chiffres sont deux à deux différents ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 111 ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un des chiffres égal à 1 ?

5.8 Exercice 7 : Jeux de cartes

Dans un jeu de cartes de 32 cartes, on prélève simultanément 4 cartes, on obtient alors une main. On admet que les mains possibles sont équiprobables. Les familles sont les oeurs, les carreaux, les trèfles et les piques.
Calculer la probabilité d'obtenir dans une main respectivement :

a) quatre cartes de la même famille ?

b) Une carte de chaque famille ?

c) Exactement un as ?

d) Exactement deux as ?

e) Aucun as ?
f) Au moins un as ?
g) Deux coeurs, deux piques ?
h) Deux coeurs, un pique, un trêfle ?
i) Exactement deux coeurs et un as ?
j) Un carré, soit quatre cartes de la même valeur ?

5.9 Exercice 8 : Les Anniversaires

n étudiants sont dans un amphithéâtre.

1. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux étudiants soient nés le même jour ? (sachant que $n \leq 365$ et qu'on ne tient pas compte des années bisextiles)
2. Vérifier que si $n \geq 24$ alors la probabilité pour qu'au moins deux étudiants soient nés le même jour est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. C'est ce qu'on appelle le paradoxe des anniversaires.

5.10 Exercice 9 : Les Manteaux

10 personnes ont déposé leur manteau. Elles le reprennent par hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins huit personnes retrouvent leur manteau.

5.11 Exercice 10 : Fiabilité

Deux systèmes sont composés de la façon ci-dessous. La probabilité pour qu'un composant soit défectueux est égal à 0,05.

1. Figure 1 : Pour des raisons de fiabilité les composants A ont été triplés de telle sorte que pour que le système fonctionne il suffit qu'au moins un des composant fonctionne. Les système 1 est composé des trois composants placés en parallèle. Calculer la probabilité pour que le système de la figure 1 fonctionne.
2. Figure 2 : Le système 2 est composé du système 1 en serié avec le composant B. Calculer la probabilité pour que le système ne fonctionne pas sachant que la probabilité pour que B soit défectueux est égale à 0,02.

5.12 Exercice 11 : Alcootest

Un laboratoire a mis au point un alcootest. On sait que 2% des personnes contrôlées par la police sont en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :

- lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100, l'alcootest se révèle positif
- lorsqu'une personne n'est pas réellement en état d'ébriété, 96 fois sur 100, l'alcootest se révèle négatif

Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif ?

5.13 Exercice 12 : Sur Orion

Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% opposés et 24% sans opinion.Pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrerez un habitant d'Orion :

— a) Quelle est la probabilité qu'il soit sans opinion

— b) Si il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?

— c) Si il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

5.14 Exercice 13 : Les menteurs

On considère n menteurs $I_1, I_2, I_3, ..., I_n$. I_1 reçoit l'information sous la forme "oui" ou "non", la transmet à I_2 et ainsi de suite jusqu'à I_n et I_n l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $p \in]0,1[$, transmet le contraire avec la probabilité $1-p$, et les réponses des n personnes sont indépendantes.

1. Notons A_n l'évènement "la n-ième personne transmet l'information initiale". Calculer la probabilité $p_n = P(A_n)$ (écrire $p_{n+1} = cp_n + d$).
2. Que se passe t'il quand n tend vers l'infini ?

5.15 Exercice 14 : Vrai/Faux

Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. Deux évènements indépendants sont disjoints.
2. Considérons trois évènements A, B, C,alors l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
3. Les évènements A et B suivants sont ils indépendants : on considère un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte dans une jeu de 32 cartes, soit A :" la carte obtenue est rouge", et B l'évènement : "la carte obtenue est une figure".

5.16 Exercice 15 : Un curieux problème d'indépendance

On lance n fois une pièce équilibrée (avec $n \geq 2$) et on considère les évènements suivants :
A :"on obtient au plus une fois pile" B : "on obtient toujours le même résultat".
Les évènements A et B sont ils indépendants ?

5.17 Exercice 16 : n Urnes

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $n-k$ boules blanches. On choisit au hasard une des n urnes puis on tire successivement avec remise deux boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
2. Même question si le tirage s'effectue sans remise ?
3. En déduire les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini.
4. Qu'en concluez vous ?

5.18 Exercice 17 : Le paradoxe de Monty Hall (facultatif)

On considère le jeu de stratégie suivant : un candidat se trouve face à trois portes numérotées de 1 à 3, un prix a été caché derrière l'une d'elles. Le candidat se trouve devant la porte 1. L'animateur (qui sait où se trouve le prix) ouvre une des deux portes 2 ou 3 et le candidat constate que le prix n'y est pas. Le candidat doit-il ouvrir la porte 1 ou changer de porte ?

1. Le candidat se trouve face à une éventualité de la forme $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ où ω_1 est le numéro de la porte qu'il veut ouvrir, ω_2 le numéro de la porte que le présentateur a ouvert et ω_3 le numéro de la porte derrière laquelle est le prix.

   Calculez la probabilité de chaque éventualité. (Pour ce faire utilisez un arbre et introduisez les évènements suivants : T_i : le prix a été caché derrière la porte i P_i : le présentateur ouvre la porte i J_i : le joueur ouvre la porte i.)
2. Quelle est la probabilité de gagner ?
3. Le candidat garde la porte 1. Quelle est la probabilité de gagner ?
4. Le candidat choisit systématiquement de changer de porte. Quelle est sa probabilité de gagner ?
5. Conclure.

5.19 Exercice 18 : Marche aléatoire (facultatif)

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). A chaque instant, elle fait un bond de 1 avec la probabilité p $(0 < p < \frac{1}{2})$, ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n, on a : $x_{n+1} = x_n + 1$ avec la probabilité p et $x_{n+1} = x_n - 1$ avec probabilité $q = 1 - p$. Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction $alea()$ qui "retourne un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$."Comment interpretez vous cette expression ?
2. Écrire un algorithme qui simule cette marche aléatoire. En particulier, cet algorithme prendra en entrée l'abscisse a de départ, la longueur N du segment, et produira en sortie un message indiquant si la marche s'arrête en 0 ou en N, et le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête. On supposera qu'on dispose d'une fonction $alea()$ qui retourne un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

3. On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0.
   (a) Que vaut u_0 ? u_N ?
   (b) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$
   (c) En déduire l'expression exacte de u_a.
4. On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en N. Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.
5. Calculer $u_a + v_a$.
6. Qu'en déduisez-vous ?

6 Cours 3,4 et 5 : Variables aléatoires discrètes

6.1 Définition

Definition 14. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités,
On appelle **variable aléatoire (v.a. en abrégé) discrète** définie sur Ω, toute application,

$$\begin{array}{cccc} X & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

1. $X(\omega)$ qui est l'ensemble des valeurs prises par X, est fini ou dénombrable.
2. $\forall x_i \in X(\Omega) \quad \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}$. C'est l'évènement de $\mathcal{A}$: X prend la valeur x_i.

6.2 Loi de probabilité

Proposition 11. On peut alors construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X)$ en posant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(A)), P_X(\Omega) = P(\{\omega \in \Omega\, X(\omega) \in A\})$$

On peut vérifier que c'est bien une probabilité sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$. On notera $P(X \in A)$ la probabilité $P_X(A)$ et $P(X = x_i)$ la probabilité $P_X(\{x_i\})$. En particulier, on aura donc

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$$

Definition 15. La probabilité ci-dessus est appelée **loi de probabilité de** X. Elle est caractérisée par la donnée de $P(X = x_i)$ pour chaque x_i de $X(\Omega)$.

Exemple 17. Exemple Introductif
Considérons le lancement de deux dés de couleurs différentes :

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ...(1,6)..................(6,1), (6,2), ..., (6,1)\}$$

Définissons

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X : (i,j) \mapsto |i - j|$$

.
Justifier que c'est bien une vad et déterminer sa loi de probabilité.

6.3 Variables aléatoires indépendantes

Definition 16. Définitions de v.a indépendantes
On dit que les vad X et Y sont **indépendantes**, si $\forall x \in X(\Omega)$ $\forall y \in Y(\Omega)$, les évènements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants.
Les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $k \in [|2, n|]$, et pour indices $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, $\forall x_{i_1} \in X_{i_1}, \forall x_{i_2} \in X_{i_2}, ...\forall x_{i_k} \in X_{i_k}$ les évènements $\{X_{i_1} = x_{i_1}\} \quad \{X_{i_2} = x_{i_2}\}...\{X_{i_k} = x_{i_k}\}$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 12. Exemple fondamental
Des v.a X et Y sont indépendantes si elles se rapportent à deux expériences effectuées de façon indépendante. Ainsi lorsqu'on fait plusieurs répétitions indépendantes d'une même expérience (tirages successifs avec remise par exemple) : soit X_1 le résultat du premier essai,..., X_n le résultat du n ième essai, les v.a X_1,...X_n sont indépendantes

6.4 Variables aléatoires discrètes : Lois usuelles discrètes

6.4.1 Loi de Bernoulli

Definition 17. Loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire qui n'a que deux issues :

1. le succès qui se produit avec la probabilité p
2. l'échec qui se produit avec la probabilité $q = 1 - p$

La loi de Bernoulli est la loi d'une variable aléatoire qui code le résultat d'une épreuve de Bernoulli avec 0 pour l'échec et 1 pour le succès.

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$
$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p$$

6.4.2 Loi Uniforme discrète

Definition 18. Loi Uniforme discrète

C'est la loi qui correspond au cas où l'on a équiprobabilité.

$$X(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}\ a_i \in \mathbb{R}\ i \in [\![1, n]\!]$$
$$\forall 1 \leq k \leq n \quad P(X = a_k) = \frac{1}{n}$$

Remarque : la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ *est une loi uniforme* discrète.

6.4.3 Loi Binomiale

Definition 19. Loi Binomiale
Partons d'une expérience ne comportant que deux résultats possibles qui peut donc être modélisée par une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et répétons n fois l'expérience de façon **indépendante**. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi ces n expériences est appelée une loi Binomiale notée $\mathcal{B}(n, p)$. La loi binomiale est caractérisée par deux paramètres : n qui correspond au nombre de fois où l'on répète l'expérience et p qui correspond à la probabilité de succès dans une expérience.

$$X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$$
$$\forall k \in [\![0, n]\!]\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Exemple 18.

On dispose d'une urne avec 5 boules rouges et 15 boules noires. On tire 4 boules avec remise à chaque tirage.Soit X la va qui compte le nombre de boules noires obtenues. Quelle est la loi de X ?

6.4.4 Loi hypergéométrique

Definition 20. Loi hypergéométrique

Le contexte est celui d'un tirage simultané de n individus dans une population de taille $m >> n$. Une proportion p de la population possède un caractère fixé. On introduit la va X qui correspond au nombre d'individus tirés possédant le caractère étudié. Elle est notée : $H(m, n, p)$

$X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$\forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = \dfrac{\binom{mp}{k}\binom{m(1-p)}{n-k}}{\binom{m}{n}} \quad \text{si} \quad k \leq mp$

$\forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = 0 \quad \text{si} \quad k > mp$

Exemple 19. Sur un lot de 10 pièces d'équipement, trois pièces sont non conformes. On tire simultanément 5 pièces, quelle est la loi du nombre de pièces non conformes ?

Exemple 20. Une urne contient 10 boules dont 7 sont blanches. On prélève 3 boules dans l'urne et simultanément. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches. Calculer $P(X = 2)$.

Theoreme 13. Approximation par la loi binomiale
Pour n, p, k fixés,

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\binom{mp}{k}\binom{m(1-p)}{n-k}}{\binom{m}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En pratique, cela permet d'approcher la loi hypergéométrique par la loi binomiale plus simple d'utilisation lorsque m est très grand.
Ceci signifie que lorsque l'on fait un tirage e n individus, si m est grand cela ne change presque rien que le tirage soit avec ou sans remise. On pourra donc supposer que le tirage se fait avec remise si $m >> n$. En pratique dès que $\dfrac{n}{m} < 0.1$.

Exemple 21.

Sur un lot de 10000 pièces, 30% des pièces sont non conformes. On tire simultanément 5 pièces. Quelle est la loi de la va indiquant le nombre de pièces non conformes ?

6.4.5 Loi géométrique

Definition 21. Loi géométrique _
Nous nous intéressons à une succession d'épreuves de Bernoulli, à l'issue de chacune d'elle soit il y a un échec avec la probabilité $1 - p$ soit il y un succès avec la probabilité p. On s'intéresse à l'apparition du premier succès.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}$$
$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$
$$X \simeq G(p)$$

6.4.6 Loi de Poisson

Definition 22. Loi de Poisson

C'est la loi des évènements rares.
La loi de Poisson est caractérisée par un paramètre $\lambda > 0$. Elle est définie par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$
$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$X \simeq P(\lambda)$$

Remarque : $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1.$

Proposition 14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < p < 1$, supposons que lorsque $p = \frac{\lambda}{n}$ avec une constante $\lambda > 0$ de sorte que quand n tend vers $+\infty$, p tende vers 0 Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
La loi de Poisson apparait donc comme une approximation de la loi binomiale quand n est "grand" et p est "petit.

Theoreme 15. Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson en pratique

Si n est grand et p assez petit, on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de même espérance mathématique $\mathcal{P}(\lambda)$.
On admet souvent que cette approximation est satisfaisante lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$ avec $np \leq 10$.
Mais il s'agit d'une convention, qui peut varier selon les auteurs. L'intérêt d'une telle approximation apparait quand les calculs sont plus simples.

Exemple 22.

Par exemple, avec la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.05)$ on a :

$$P(X = 4) = \binom{100}{4}(0.05)^4(0.95)^{96} \simeq 0.178$$

et si nous l'approchons par une loi de Poisson de paramètre 5 :

$$P(X = 4) = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \simeq 0.175$$

Avec un temps de calcul réduit, on obtient une valeur numérique très satisfaisante.

En pratique, $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par $\mathcal{P}(np)$ si les conditions suivantes sont réalisées :

$$n \geq 30 \quad p \leq 0,1 \quad np \leq 10$$

Exemple 23.

On admet que pour un type d'équipement informatique la durée de vie moyenne exprimée en années est de 3 ans. Calculer la probabilité pour que la durée de vie soit strictement supérieure à 1.

Exemple 24.

L'opératrice d'un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.

1. Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 5 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que ce nombre d'appels dépasse 15 ?

6.5 Espérance, moments d'ordre p d'une v.a.d et variance

6.5.1 Espérance

Definition 23. Espérance d'une v.a.d

On dit que X est **intégrable** si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de X notée $E(X)$ est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Elle correspond à la valeur moyenne

Exemple 25.

Déterminer l'espérance

1. de l'exemple introductif.
2. pour une loi de Bernoulli
3. pour une loi de Poisson

Proposition 16. Propriété de l'espérance

1. Si $X = a$ c'est-à-dire si $X(\Omega) = \{a\}$ then $E(X) = a$
2. Si a et b sont des réels et X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(L'espérance est un opérateur linéaire.)

3. $E(X - E(X)) = 0$, on dit que la va $X - E(X)$ est centrée.

6.5.2 Esperance et indépendance

Proposition 17. Esperance et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes intégrables alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Remarque 4.

L'espérance mathématique ne suffit pas à décrire une variable aléatoire discrète : en effet soit X la variable aléatoire mesurant le gain d'un joueur lors d'une loterie comportant 1000 numéros faisant tous gagner 5 euros, et soit Y son an analogue dans une loterie de 1000 numéros dont un seul est gagnant et fait gagner 5000 euros. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$, qu'en concluez vous ?

6.5.3 Moment d'ordre p

Definition 24. Moment d'ordre p d'une v.a.d

On dit que X est **de puissance p-intégrable** si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x^p| p_X(x) < +\infty$$

L'espérance de X^p notée $E(X)$, appelée **moment d'ordre** p est définie par :

$$E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$$

Par exemple, si X est de carré intégrable alors

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$$

6.5.4 Variance

Definition 25. Variance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable **La variance** de X est le nombre réel positif donné par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(x))^2 P(X = x)$$

On peut montrer que

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$$

L'écart-type, noté $\sigma(X)$ est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Proposition 18. Propriétés de la Variance

Si X est de carré intégrable alors pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$Var(aX) = a^2 Var(X) \quad Var(X + b) = Var(X)$$

6.5.5 Variance et Indépendance

Proposition 19. Variance et Indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de carré intégrable alors :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Exemple 26. Prouver la formule précédente.
En déduire l'expression de la variance pour une loi binomiale.

Preuve 1.

$Var(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

par linéarité de l'espérance et puisque $E(XY) = E(X)E(Y)$

Exemple 27.

Déterminer la variance de l'exemple introductif

Remarque 5. Signification concrète de la variance

Il s'agit d'une mesure de la dispersion des valeurs prises par la variable, dispersion autour de son espérance (sa moyenne) et en tenant compte des probabilités d'apparition des valeurs.

Résumé pour les variables aléatoires discrètes

Nom	Loi	$P(X = k)$	$E(X)$	$Var(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$P(X = 1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(p)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

6.6 Fonction de répartition

Definition 26. Fonction de répartition d'une v.a.d

Soit X une v.a.d, **sa fonction de répartition** est définie par :

$$\forall a \ \in \mathbb{R} \ F_X(a) = P(X \leq a)$$

où $P(X \leq a)$ désigne la probabilité de $\{x_i \in X(\Omega) \quad x_i \leq a\}$

Propriété 2. Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a.d X vérifie les propriétés suivantes :

1. C'est une fonction en escalier
2. Elle est continue à droite
3. $lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0 \ lim_{a \to +\infty} F_x(a) = 1$

Remarque 6.

Si on connait la loi de X, il est facile de calculer la fonction la fonction de répartition :

$$F(x) = \sum_{x_i \in X(\Omega) \quad x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Réciproquement si on connait la fonction de répartition, il est facile de retrouver la loi. Supposons par exemple que dans $X(\Omega)$, les x_i soient rangés par ordre croissant,

$F(x_i) = P(X \leq x_i) = P(X \leq x_{i-1} \quad \text{ou} \quad X = x_i) = P(X \leq x_{i-1} + P(X = x_i) = F(x_{i-1} + P(X = x_i)$

d'où

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Exemple 28.

Donner la fonction de répartition de l'exemple introductif.

Definition 27. Loi conditionnelle

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes prenant un nombre dénombrable de valeurs, alors la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \text{tel que} \quad P(X = x) > 0$$

$$P_{Y/X=x}(y) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(X = x)}$$

$$E(Y/X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P_{Y/X=x}(y)$$

Exemple 29.

Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p. Quelle est la loi de Y ?

6.7 Fonction caractéristique

Definition 28.

On appelle **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire discrète X :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)e^{itk}$$

Propriété 3. Propriétés de la fonction caractéristique

1. ϕ_X caractérise la loi de X ce qui veut dire que si $\phi_X = \phi_Y$ alors X et Y ont même loi
2. $\forall n \geq 1$, si $E[|X|^n] < +\infty$ alors ϕ_X est dérivable jusqu'à l'ordre n et $\forall 1 \leq k \leq n$

$$\phi_X^{(k)}(t) = i^k E[X^k e^{itX}]$$

$$\phi^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$

Proposition 20. Fonctions caractéristiques usuelles

1. Pour la Loi de Bernoulli

$$X \simeq B(p)$$

$$\phi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$$

2. Loi Binomiale

$$X \simeq B(n, p)$$

$$\phi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

3. Pour la Loi de Poisson

$$X \simeq \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

4. Pour la loi géométrique

$$X \simeq G(p)$$

$$\phi_X(t) = pe^{it}\frac{1}{1 - (1 - p)e^{it}}$$

Exemple 30.

1. Déterminer l'expression de la fonction caractéristique pour une loi binomiale
2. En utilisant cette expression, retrouver la formule de l'espérance et de la variance de X.

6.8 Fonction Génératrice

Definition 29.

Soit X une v.a discrète définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **fonction génératrice associée à X la fonction G_X définie par lorsqu'elle existe :**

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P(X = n)$$

Propriété 4. Propriétés de la fonction génératrice

1. G_X est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.
2. G_X est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et infiniment dérivable sur $]-1, 1[$.
3. G_X caractérise la loi de X : deux variables aléatoires ayant même fonction génératrice ont même loi. En particulier :

$$P(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0)$$

.

4. $\forall k \geq 1$, $E(X^k)$ est finie si et seulement si G_x admet une dérivée d'ordre k au point 1. Dans ce cas

$$G_X^{(k)}(1) = E[X(X-1)...(X-k+1)]$$

En particulier,

$$G'_X(1) = E(X)$$

$$G''_X(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

$$Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1)(1 - G'_X(X))$$

.

Proposition 21. Fonctions génératrices usuelles

1. Loi de Bernoulli
   Pour $X \simeq B(p)$ alors $n \geq 2$ $P(X = n) = 0$ donc X est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R}\ G(s) = 1 - p + sp$$

2. Loi Binomiale
   Pour $X \simeq B(n, p)$ alors X est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R}\ G(s) = (1 - p + sp)^n$$

3. Loi de Poisson
   Pour $X \simeq P(\lambda)$ alors X est bornée et $R = +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R}\ G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$G(s) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{s\lambda}$$

$$G(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

4. Loi géométrique
   Si $X \simeq G(p)$ alors $R \neq +\infty$ et

$$\forall s \in \mathbb{R}\ G(s) = \frac{ps}{1-qs} \text{ avec } q = 1-p \text{ et } |s| < \frac{1}{p}$$

Proposition 22.

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes $X : \Omega \leftrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \leftrightarrow \mathbb{N}$ alors :

$$\forall s \in [-1, 1] \quad G_{X+Y}(s) = G_X(s).G_Y(s)$$

Remarque 7.

L'un des principaux intérêt de la fonction génératrice est qu'elle permet très facilement de caractériser la loi de la somme de variables aléatoires entières indépendantes.

Exemple 31.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et de paramètre $\mu > 0$, déterminer la loi de $X + Y$.

Proposition 23.

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées et N une variable aléatoire entière indépendante de la suite. On pose : $S = X_1 + X_2 + ... + X_N \quad \text{si} \quad N \in \mathbb{N} \quad S = 0 \quad \text{si} \quad N = 0$
alors

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s))$$

Démonstration.

La somme S est doublement aléatoire car les X_i sont aléatoires mais l'indice terminal de sommation N est aussi aléatoire. Pour effectuer le calcul, on va donc décomposer l'espérance donnant la fonction génératrice de S sur les valeurs prises par cet indice en remarquant que $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(N=n)} = 1$ puis utiliser les propriétés d'indépendance entre les différentes variables aléatoires. Ainsi

$$G_S(s) = E(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} s^S) = P(N=0) + \sum_{n\in\mathbb{N}^\times} E(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)} \prod_{i=1}^{n} s^{X_i})$$
$$G_S(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(N=n) g_{X_1}(s)^n = G_N(G_{X_1}(s))$$

$\square$

Exemple 32.

Supposons que le nombre d'oeufs pondus par une poule soit une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notons $K = X_1 + X_2 + ... + X_N$ la variable aléatoire donnant le nombre de poussins obtenus où $X_i = 1$ si il y a éclosion de l'oeuf et 0 sinon. Déterminer la loi de K

6.9 Table de Poisson

Table de la loi de Poisson

	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	8										0,0000

	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
r	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11									0,0000	0,0000

	λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
r	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,1083	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,0053	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	13									0,0000	0,0000

	λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9
r	0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
	1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
	2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
	3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
	4	0,1336	0,1680	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
	5	0,0668	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
	6	0,0278	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
	7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
	8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
	9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
	10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
	11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
	12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
	13		0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504

7 TD6, TD7 ,TD8 et TD9

7.1 Exercice 1 : Une variable aléatoire

Une v.a X peut prendre l'une des trois valeurs 0 ou 1 ou 2 avec des probabilités positives ou nulles. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que $E(X) = \frac{3}{2}$ et $Var(X) = \frac{1}{4}$

7.2 Exercice 2 : Le Jeu

Monsieur Dupont propose le jeu suivant à Monsieur Durand : un sac contient n boules noires (n entier naturel supérieur ou égal à 1 et une boule blanche. Monsieur Durand tire une boule au hasard (les tirages sont équiprobables) note sa couleur, la remet dans le sac, puis tire au hasard une nouvelle boule. Les deux tirages sont supposés indépendants. Si les deux boules tirées sont noires, Monsieur Dupont verse 1 euro à Monsieur Durand. Si les deux boules tirées sont blanches, Monsieur Dupont verse 10 euros à Monsieur Durand. Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, Monsieur Durand doit donner 3.5 euros à Monsieur Dupont. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain de Monsieur Durand.

1. Détermine la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique et sa variance.
2. Pour quelles valeurs de n le jeu est il équitable (c'est à dire $E(X) = 0$) ?
3. Pour quelles valeurs de n le jeu risque t'il de rapporter le plus d'argent à Monsieur Dupont ?

7.3 Exercice 3 : Production annuelle

Un atelier doit assurer une production journalière donnée et constante. La probabilité qu'il l'atteigne effectivement est $p = 0,995$ Soit X la variable aléatoire définie par « le nombre de jours sur une année où la production n'est pas atteinte » On considère que l'année comporte 230 jours ouvrables

1. Déterminer la loi de X et ses paramètres
2. Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus de 4 jours dans l'année à production non atteinte. Peut-on s'engager auprès d'un client à assurer au minimum 226 livraisons au risque de 1% ?
3. Quel est le nombre annuel moyen à production insuffisante ?

7.4 Exercice 4 : Logistique

Un chef d'entreprise, pour éviter l'attente des camions venant livrer, envisage, si cela se montre nécessaire, de construire de nouveaux postes de déchargement. Il y en a actuellement cinq. On considère, pour simplifier l'étude, qu'à la fin de la journée on a réussi à décharger tous les camions,. On admet que la variable aléatoire X qui, à un jour tiré au hasard dans les jours ouvrables d'une année, associe le nombre de camions venant livrer ce jour-là, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

1. Quelle est, à 0,001 près, la probabilité de n'avoir aucun camion en attente ?
2. Combien faudrait-il de postes de déchargement pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 0,95 ?
3. On prévoit, pour les années à venir, un doublement de la fréquence des livraisons. Quel sera le paramètre de la loi de Poisson ?

7.5 Exercice 5 : Un dé cubique

Sur un dé cubique, l'une des faces numérotées 1, n faces sont numérotées 2 et les faces restantes sont numérotées 3. Les faces d'un second dé cubique sont numérotées $1, 2, 2, 3, 4, 4$. Les deux dés sont lancés simultanément et leurs faces ont la même probabilité de sortir en position supérieure. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des points marqués sur les faces supérieures.

1. Déterminer n pour que la probabilité de l'évènement $(X = 6)$ soit égale $\dfrac{7}{36}$
2. On choisit maintenant $n = 2$. Donner la loi de probabilité de X.
3. On lance les deux dés précédents quatre fois. Calculer la probabilité de l'évènement "$(X = 3)$ est réalisé trois fois "
4. On lance maintenant les deux dés k fois et soit q_k la probabilité de l'évènement "$(X = 3)$ est réalisé k fois " Déterminer la plus petite valeur de k pour avoir $q_k \leq 0.01$.

7.6 Exercice 6 : Jus d'Orange

Un distributeur automatique élabore du jus d'orange en mélangeant de l'eau et du concentré d'orange. Une enquête a montré que la variable aléatoire Z qui, à toute période de 30 jours associe le nombre de pannes mécaniques du distributeur, suit la loi de Poisson telle que : $P(Z = 1) = 6 * P(Z = 3)$.

1. Calculer le paramètre de cette loi de Poisson.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux mises hors service du distributeur, en un mois de 30 jours, par défaillance mécanique du distributeur.

7.7 Exercice 7 : Tiges

Une entreprise fabrique des tiges en plastique pour du matériel informatique, de longueur théorique 100 millimètres.
Dans un lot de ce type de tiges, 2% de tiges ne sont pas conformes. On prélève n tiges de ce lot pour vérification de longueur, le lot est suffisamment important pour asimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Soit Y la variable aléatoire, qui à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges non conformes.

1. On prendra pour cette question $n = 50$
   (a) Donner la loi de Y.
   (b) Calculer$P(Y = 3)$
2. On prendra ici $n = 100$, en utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges non conformes.

7.8 Exercice 8 : Réacteurs

On admet que, pour un avion à réacteurs, le risque de panne de l'un des réacteurs en vol est indépendante de l'état des autres réacteurs et qu'elle est la même pour chacun d'eux : égale à $q = 1 - p$ où $q \in]0, 1[$. On admet aussi que l'avion peut poursuivre son vol si au moins la moitié des réacteurs sont en état de fonctionnement.
Comparer la fiabilité offerte par un avion biréacteur et un avion quadriréacteur en fonction de p.

7.9 Exercice 9 : Veilleur de Nuit

Un veilleur de nuit doit ouvrir 12 portes avec 12 clés différentes mais non discernables.

1. Déterminer la probabilité qu'il ouvre la première porte au premier essai ?
   Puis au deuxième essai, sachant qu'à chaque fois qu'il choisit une clé, il ne la remet pas dans le trousseau si elle ne convient pas ?
2. En déduire la probabilité pour qu'il ouvre la première porte au k-ième essai sachant qu'à chaque fois qu'il choisit une clé, il ne la remet pas dans le trousseau si elle ne convient pas.
3. Le nombre total d'essais effectués pour la première porte définit une variable aléatoire X_1 dont on demande de déterminer la distribution de probabilités, l'espérance mathématique.
4. Que faudrait il modifier dans l'énoncé pour que X_1 suive une loi géométrique. Préciser alors son paramètre et déterminer son espérance dans ce cas.

Pour chaque porte, le processus recommencera comme pour la première porte, mais avec seulement les clés restantes.

7.10 Exercice 10 : Appels en retard et service de dépannage

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec du retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
2. Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".

   Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
3. Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$. (On distinguera les cas $0 \leq k \leq n$ et $k > n$ et reconnaitra une loi de probabilité usuelle)
4. En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".
5. Déterminer la loi de Z à l'aide de la formule des probabilités totales. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.
6. En 2020, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

7.11 Exercice 11 : Loi Géométrique et absence de mémoire

Soit X suit une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est sans mémoire si pour tous m et n entiers naturels si :

1. $P(X > n) > 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad P(X > m + n / X > n) = P(X > m)$

1. Démontrer que la propriété ii) ci-dessus est équivalente à

$$P(X > m + n) = P(X > n)P(X > m)$$

   .
2. On suppose que Y suit une loi géométrique.
   — Déterminer $P(Y > n)$.
   — Démontrer que Y est sans mémoire. Interpréter ce résultat.
3. Réciproquement considérons X une variable aléatoire discrète sans mémoire.
   — En appliquant la propriété ii) à des valeurs particulières de m et n démontrer que $P(X) > 0) = 1$.
   — En appliquant la propriété ii) à des valeurs particulières de 1 et n démontrer qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(Y > n) = (1 - p)^n$.
   — En déduire que Y suit une loi géométrique.

7.12 Exercice 12 : Autour de la loi binomiale

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de binomiale de paramètre n et de paramètre p, déterminer la loi de $X+Y$.

7.13 Exercice 13 : Processus simplifié de Galton-Watson

Nous étudions une catégorie de cellules. Chaque cellule peut soit se diviser en deux en donnant deux cellules filles avec la probabilité p soit disparaitre avec une probabilité $q = 1-p$. $(0 < p < 1)$. On suppose que les reproductions des différentes cellules sont indépendantes et que toutes ces cellules, quel que soit leur rang de naissance suivent la loi précédente. Au départ il n'y a qu'une cellule appelée cellule souche. Au fur et à mesure des reproductions, apparaissent de nouvelles générations de cellules. On notera N_n le nombre de cellules présentes à la génération n. Ainsi $N_0 = 1$, N_1 le nombre de cellules filles de la cellule originelle et ainsi de suite. On notera $X_{n,k}$ le nombre de cellules filles de la cellule numéro k de la $(n-1)$ ème génération. Ainsi : $N_1 = X_{1,1}$ $N_2 = X_{2,1} + ... + X_{2,N_1}$ $N_n = X_{n,1} + ... + X_{n,N_{n-1}}$ $N_{n+1} = X_{n+1,1} + ... + X_{n+1,N_n}$

1. Donner la loi de $X_{n,k}$ et sa fonction génératrice.
2. Déterminer la fonction génératrice G_{N_1} de N_1, on la notera G par la suite.
3. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, la fonction génératrice de N_{n+1} et celle de N_n notées respectivement $G_{X_{n+1}}$ et G_{X_n} satisfont $G_{N_{n+1}}(s) = G_{N_n}(G(s)) = G(G_{N_n}(s))$.
4. Montrer par récurrence que $E(N_n) = (2p)^n$. On pourra à cet effet dériver la relation précédente et l'appliquer à une valeur particulière de s.
5. On va s'intéresser ici au comportement de la suite définie par $u_n = P(N_n = 0)$ (probabilité d'extinction à la nième génération) et à sa limite (probabilité d'extinction).
   (a) Déterminer une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}. On exprimera à cet effet u_n en fonction de G.
   (b) Étudier la suite (u_n) dans le cas où $p \leq \dfrac{1}{2}$ puis déterminer la probabilité d'extinction dans ce cas particulier.

8 Cours 6 et 8 : Variables aléatoires continues

Exemple 33. Jusqu'à présent, les variables aléatoires étudiées prenaient des valeurs isolées (nombre de voitures vendues, face obtenue après le lancer d'un dé...)
Or dans les domaines économiques et industriels, nous sommes amenés à étudier des variables aléatoires prenant au moins théoriquement n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 34. Par exemple considérons la variable aléatoire X mesurant la durée de bon fonctionnement en jours d'un équipement particulier fabriqué en grande série.
Pour une telle variable aléatoire, les évènements intéressants ne sont pas du type "$X = 400$" ou "$X = 271,5$" mais plutôt "$X \leq 400$" ou "$400 \leq X \leq 1200$".

8.1 Loi de probabilité et densité de probabilité

8.1.1 Loi de probabilité

Definition 30. Loi de probabilité

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace de probabilités, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle, on appelle **loi de probabilité** associée à X, la donnée de p_X :

$$p_X[a,b] = P(a \leq X \leq b)$$

8.1.2 Densité de probabilité

Definition 31. Densité de probabilité d'une v.a.c

Nous dirons qu'une fonction f est une densité de probabilité si :

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ f \geq 0$
2. f est continue sauf en un nombre fini de points
3. on a toujours $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

8.2 Variable aléatoire à densité

Definition 32. Variable aléatoire à densité
On dit qu'une va est **une variable aléatoire à densité ou encore absolument continue**, notée v.a.c, s'il existe une densité de probabilité f telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on ait :

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx$$

Ainsi si X étant une vac, sa loi de probabilité s'exprime par :

$$\forall [a,b] \in \mathbb{R}, P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

;avec f_X la **densité de probabilité** associée à X.

Remarque 8. 1.

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

2.

$$\forall a \; P(X = a) = 0$$

donc X ne charge que les intervalles.

Exemple 35. Montrer que la fonction définie par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$

$$f(x) = 0.002e^{-0,002x} \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

est bien une densité de probabilité. La variable aléatoire associée X mesure par exemple la durée de bon fonctionnement d'un équipement particulier.

Exemple 36. Déterminer la valeur de c réel pour que la fonction suivante soit une densité de probabilité : soient a et b des réels tels que $a < b$ $f(x) = c \quad x \in [a, b]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Utilisation de la densité de probabilités

1. Elle permet, comme nous venons de le voir, de calculer des probabilités.
2. Elle permet également de déterminer l'espérance et la variance.

8.3 Variables aléatoires indépendantes

Definition 33. Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires à densité X et Y sont **indépendantes** si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et tout intervalle J de $\mathbb{R}$, on a $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$

Les variables aléatoires à densité $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes**, si pour tout $k \in [|2, n|]$ et pour tous indices $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq i_n$ et pour tout intervalle $J_{i_1} \in \mathbb{R}$, pour tout intervalle $J_{i_2} \in \mathbb{R}$, ..., pour tout intervalle $J_{i_k} \in \mathbb{R}$, on a

$P(X_{i_1} \in J_{i_1}, X_{i_2} \in J_{i_2}, ..., X_{i_k} \in J_{i_k}) = P(X_{i_1} \in J_{i_1})P(X_{i_2} \in J_{i_2})...P(X_{i_k} \in J_{i_k})$

Remarque 9. Comme dans le cas discret, si les v.a X et Y se rapportent à deux expériences aléatoires effectuées de façon indépendante, alors elle sont indépendantes.

8.4 Variables aléatoires à densité : lois usuelles

8.4.1 Loi Uniforme

Definition 34. Lois usuelles : Loi Uniforme
$a < b$, X suit une loi Uniforme sur $[a, b]$: $X \simeq U(a, b]$ si

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}$$

8.4.2 Loi Exponentielle

Definition 35. Lois usuelles : Loi Exponentielle
La loi exponentielle est utilisée pour modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure.

$\lambda > 0$, X suit la loi exponentielle de paramètre λ $X \simeq \mathcal{E}(\lambda)$ si

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$$

Propriété 5. Propriété d'absence de mémoire
Si $X \sim \mathcal{E}$, alors

$$\forall s > 0 \quad t > 0 \quad P(X > t + s / X > t) = P(X > s)$$

Remarque 10. Nous montrerons en td que seule la loi exponentielle (parmi les lois absolument continues) possède cette propriété.

8.4.3 Loi Normale

Definition 36. Lois usuelles : Loi Normale
La loi normale est une loi fondamental en Probabilités et Statistiques , clef de voute des statistiques inférentielles.
$m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, X suit la loi Normale de paramètres m et σ : $X \simeq N(m, \sigma)$ si sa densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Definition 37. Loi normale centrée réduite

Lorsque $m = 0$ et $\sigma = 1$, on parle d'une loi normale centrée réduite notée $N(0, 1)$

Propriété 6. Propriétés de la loi Normale

1. Propriété fondamentale :

$$X \simeq N(m, \sigma) \Leftrightarrow \frac{X - m}{\sigma} \simeq N(0, 1)$$

2. Si X suit $N(m, \sigma)$ alors $Y = aX + b$ suit $N(am + b, |a|\sigma)$
3. Si X suit $N(m, \sigma_1)$, si Y suit $N(m, \sigma_2)$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y$ suit $N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

Exemple 37. Lecture directe et indirecte de la table de la loi normale
Représenter graphiquement la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Illustrer les propriétés graphiques suivantes : (Π désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite)

— $P(t_1 \leq Z \leq t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$
— $P(-h \leq Z \leq h) = 2\Pi(h) - 1$
— $\Pi(-h) = 1 - \Pi(h)$

Exemple 38. Lecture directe de la table de la loi normale centrée réduite
Pour $Z \simeq N(0,1)$ déterminer par lecture de la table :

$$P(Z \leq 1,67)$$

$$P(Z \geq 1,25)$$

$$P(Z \leq -1,67)$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2)$$

Exemple 39. Lecture Inverse de la table de la loi normale centrée réduite
Déterminer h tel que

$$\Pi(h) = 0,94$$

,

$$\Pi(h) = 0,06$$

Exemple 40. Loi Normale et Loi Normale Centrée Réduite
Pour $X \simeq N(4,2)$, déterminer $P(X \leq 6)$

Pour $X \simeq N(3,1.5)$, déterminer y pour que $P(X \leq y) = 0,4218$

Theoreme 24. Théorème de Moivre-Laplace
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. Pour n assez grand et p pas trop voisin de 0 et 1, X suit à peu près la loi normale de paramètres np et $\sqrt{npq}$, de même espérance mathématique et de même écart-type.

Remarque 11. Correction de continuité
Si X suit $\mathcal{B}(n,p)$, pour trouver une approximation de $P(X = k)$ avec $k \in \mathbb{N}$, on ne peut utiliser directement la loi normale car on trouverait 0. Pour corriger ceci on remarque que $P(X = k) = P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5)$ et on détermine cette dernière probabilité à l'aide de la loi normale.
Si k_1 et k_2 sont deux entiers compris entre 0 et n, les intervalles $]k_1, k_2[$ et $[k_1, k_2]$ n'ont pas la même probabilité pour la loi binomiale, alors qu'ils ont la même probabilité pour la loi normale. Cela s'explique par la fait qu'on approche une loi discrète par une loi continue. On peut corriger cette différence en remplaçant

1. $]k_1, k_2[$ par $[k_1 + 0.5, k_2 - 0.5]$
2. $[k_1, k_2]$ par $[k_1 - 0.5, k_2 + 0.5]$

Exemple 41. Dans un certain type de graines, la probabilité de germination est de $0,8$. Une personne sème 400 graines. Calculer la probabilité qu'au moins 300 graines germent.

8.5 Esperance et moments d'ordre p

8.5.1 Esperance

Definition 38. Espérance

On dit que X est intégrable si $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx < +\infty$
L'espérance de X est alors donnée par :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx$$

Exemple 42.

Calculer et interpréter l'espérance dans notre exemple.
Déterminer l'espérance d'une loi uniforme continue et pour une loi exponentielle.

Proposition 25. Esperance de la loi normale (admis)

$$X \simeq N(m, \sigma) \quad E(X) = m \quad Var(X) = \sigma^2$$

Propriété 7. Propriétés de l'espérance
Les propriétés restent les mêmes que dans le cas discret, sous réserve de convergence des intégrales :

1. Si $X = a$ c'est-à-dire si $X(\Omega) = \{a\}$ alors $E(X) = a$
2. Si a et b sont des réels et X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

   (L'espérance est un opérateur linéaire.)
3. $E(X - E(X)) = 0$, on dit que la va $X - E(X)$ est centrée.

8.5.2 Esperance et indépendance

Proposition 26. Esperance et indépendance
Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes intégrables alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Remarque 12. Comme pour les variables aléatoires discrètes, l'espérance ne suffit pas à caractériser une variable aléatoire.

8.5.3 Variance

Definition 39. Variance

Soit $p \geq 1$, on dit que X est p intégrable si $\int_{\mathbb{R}} |x|^p f_X(x)dx < +\infty$
Si X est de carré intégrable, la variance de X est le nombre réel positif donné par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

avec

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx$$

Exemple 43.

Déterminer la variance d'une loi uniforme continue.

Propriété 8. Propriétés de la variance

Sous réserve des convergences des intégrales, nous obtenons comme dans le cas discret :
Si X est de carré intégrable alors pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$Var(aX) = a^2 Var(X) \quad Var(X+b) = Var(X)$$

8.5.4 Variance et Indépendance

Proposition 27. Variance et Indépendance
Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes de carré intégrable alors :

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

8.5.5 Moment d'ordre p

Definition 40.

Soit x une v.a de densité f et ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sous réserve que l'intégrale soit absolument convergente, on a :

$$E(\phi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x)dx$$

En particulier, sous réserve de convergence de l'intégrale, on peut définir **le moment d'ordre** p par :

$$E(X^p) = \int_{\mathbb{R}} x^p f(x)dx$$

8.6 Résumé

Résumé pour les variables aléatoires continues

Nom	Loi	$P(X=k)$	$E(X)$	$Var(X)$
Uniforme sur $[a,b]$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\chi_{x\geq 0}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$N(m,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

8.7 Fonction de répartition d'une v.a.c

Definition 41. Fonction de répartition d'une v.a.c

Soit X une v.a.c, **sa fonction de répartition** est définie par :

$$\forall a \ \in \mathbb{R} \ F_X(a) = P(X \leq a)$$

Propriété 9. Propriétés de la Fonction de répartition
Soit X une v.a.c de densité f_X et de fonction de répartition F_X

1. F_X est continue
2. F_X est croissante car
$$\forall a, b \in \mathbb{R} a \leq b \quad F_X(b) - F_X(a) = P(a \leq X \leq b)$$
3. $$lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0 \quad lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$$
$$\forall a \in \mathbb{R} \ F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_x(x)dx$$
4. $$\forall a \in \mathbb{R} \text{ où } f_X \text{ est continue } F_X^{'}(a) = f_X(a)$$

Exemple 44.

1. Calculer la fonction de répartition dans notre exemple, la représenter graphiquement. Déterminer et représenter graphiquement $P(X \leq 400)$ et $P(X > 1000)$ et $P(400 \leq X \leq 1000)$
2. Déterminer la fonction de répartition pour une loi exponentielle.

8.8 Fonction d'une variable aléatoire

Theoreme 28. Théorème de changement de variables

Soit X une vac de densité f et h une fonction dérivable, strictement monotone et dont la dérivée ne s'annule pas. Si $Y = h(X)$ alors Y admet pour densité :

$$\forall y \in V \ f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)|(h^{-1})^{'}(y)|$$

$$(h(h^{-1}(y)) = y$$

$$(h^{-1})^{'}(y)h^{'}(h^{-1}(y)) = 1$$

$$(h^{-1})^{'}(y) = \frac{1}{h^{'}(h^{-1}(y))}$$

sous conditions d'existence,

$$\forall y \in V \ f_Y(y) = \frac{f_X(h^{-1}(y)}{|h^{'}(h^{-1}(y))|}$$

Exemple 45.

Posons $Y = aX + b$.

Remarque 13.

Les conditions d'application de la proposition sont restrictives et elle n'est pas simple à mémoriser. Il est donc plus intéressant de savoir refaire le raisonnement.
Si h n'est pas bijective, nous pouvons dans certains cas particuliers exprime f_Y. Par exemple si $Y = X^2$.

8.9 Fonction caractéristique

Definition 42. Fonction caractéristique

On appelle **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire absolument continue X la transformée de Fourier de sa densité f_X :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX} f_X(x)dx$$

Exemple 46.

Déterminer la fonction caractéristique d'une v.a suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$

Remarque 14. Remarque pour le cas discret

Si X est une v.a discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction caractéristique est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X = n)$$

Propriété 10. Propriétés de la fonction caractéristique

1. ϕ_X caractérise la loi de X ce qui veut dire que si $\phi_X = \phi_Y$ alors X et Y ont même loi
2. La fonction caractéristique permet de calculer simplement les différents moments de la variable X, si la dérivée d'ordre k existe :

$$\phi_{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$

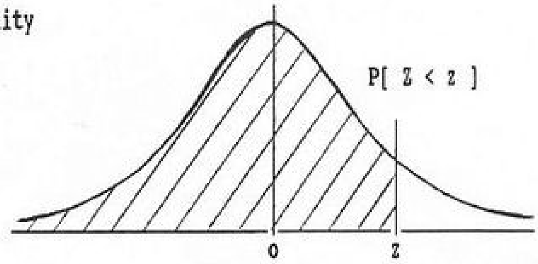
8.10 Table de la loi Normale

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[\ Z < z\ ] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\ dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

9 TD10 et TD11

9.1 Exercice 1 : Densité de probabilité

Pour un certain type d'ampoules électriques, la durée de vie en heures d'une ampoule est une variable aléatoire dont la loi de probabilité admet une densité de probabilité f définie par

$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad f(t) = ate^{-\lambda t} \quad \text{si} \quad t \geq 0$$

où a et λ sont des constantes strictement positives. Sachant que la durée de vie moyenne de ces ampoules est de 1000 heures, déterminer la valeur des constantes a et λ.

9.2 Exercice 2 : Les veaux

Dans une population de veaux, la masse d'un animal pris au hasard est une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance mathématique 500 kg et d'écart-type 40 kg. On prélève un échantillon de 80 veaux.

1. Calculer le nombre moyen de veaux pesant plus de 560 kg ?
2. pesant moins de 480 kg ?
3. ayantune masse comprise entre 450 et 550 kg ?
4. On sélectionne pour la reproduction les 15% supérieurs de l'échantillon. Á partir de quelle masse, un animal sera t'il sélectionné ?

9.3 Exercice 3 : Durée des trajets

On suppose, dans cet exercice, que toutes les durées des trajets suivent des lois normales.

1. Une directrice quitte son domicile à $8h45$ pour aller à son bureau qui ouvre à $9h$. Quelle est la probabilité qu'elle arrive en retard sachant que la durée moyenne du trajet est de 13 min avec un écart-type égal à 3 min ?
2. Le secrétaire se rend au même bureau en utilisant le train puis l'autobus. le train part à $8h32$, le trajet durant en moyenne 16 min avec un écart-type de 2 min. L'autobus part à $8h50$ (sans attendre l'arrivée du train), le trajet durant 9 min avec un écart-type d'1 min. Quelle est la probabilité pour que le secrétaire arrive à l'heure ?
3. Quelle est la probabilité pour que la directrice ou la secrétaire arrive à l'heure ?

9.4 Exercice 4 : Les forets

La longueur des tiges de forets intervient dans le classement par catégories. Pour simplifier, on supposera par la suite, que cette longueur sera le seul critère de classement. Un foret sera classé en catégorie extra si la longueur de sa tige est supérieur ou égale à 80 cm. Au 1 er décembre, on évalue la production à 6000 forets pour le mois. Á cette époque, les forets classés en catégorie extra sont payés au producteur 10 euros les dix, et les autres 6 euros seulement. La qualité de la production ayant été étudiée sur un échantillon de 100 tiges de forets, on en conclut que la longueur des tiges coupées est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 92 cm et d'écart-type 8 cm.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un foret soit classé en catégorie extra ?
2. Quelle est l'espérance mathématique du nombre de forets qui seront classées en catégorie extra sur les 6000 forets de la production de décembre ?
3. Déduisez en l'espérance mathématique de la recette pour le total de production de l'atelier pendant ce mois.

9.5 Exercice 5 : Le Jeu

Arthur et Bernard décident de faire n parties de pile ou face, avec un enjeu de 1 euro par partie. Chacun d'eux dispose de 20 euros. Le règlement aura lieu à la fin de la n-ième partie.

1. Soit X le nombre de parties que gagnera Arthur. Á quelle double inégalité soit satisfaire X pour que le règlement puisse s'effectue sans dette de l'un ou l'autre joueur .
2. déterminer une valeur de n pour que la probabilité d'un règlement sans dette soit au moins égale à 0.68.

9.6 Exercice 6 : Vaccination

Dans une population homogène de 20000 habitants, la probabilité pour qu'une personne quelconque demande à être vaccinée de la grippe est de 0.4. De combien de vaccins doit on disposer pour que la probabilité qu'on vienne à en manquer soit inférieure à 0.1 ? (On pourra à cet effet introduire la variable aléatoire D égale au nombre de vaccins demandés.)

9.7 Exercice 7 : Tiges

Une entreprise fabrique des tiges en plastique pour du matériel informatique, de longueur théorique 100 millimètres.
Dans un lot de ce type de tiges, 2% de tiges ne sont pas conformes. On prélève n tiges de ce lot pour vérification de longueur, le lot est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Soit Y la variable aléatoire, qui à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges non conformes.

1. On prendra pour cette question $n = 50$
   (a) Donner la loi de Y.
   (b) Calculer$P(Y = 3)$
2. On prendra ici $n = 100$, en utilisant une approximation par une loi continue que l'on justifiera et en appliquant une correction de continuité calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges non conformes.

9.8 Exercice 8 : Temps de passage en caisse

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unité de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = xe^{-x} \quad \text{si} \quad x \geq 0 \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

1. Montrer que f est une densité.
2. Déterminer le temps moyen, de passage en caisse.
3. Un jour, trois clients A,B,C, se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables aléatoires T_A et T_B correspondant respectivement aux temps de passage en caisse de A et de B sont indépendantes.
   (a) M désignant le temps d'attente du client C, exprimer M en fonction de T_A et de T_B
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire M
   (c) Prouver que M est une variable à densité et expliciter sa densité

9.9 Exercice 9 : Loi du chi-deux

X une var suivant une loi normale centrée réduite.
Quelle est la densité de la var X^2, on dit qu'elle suit la loi du chi-deux à un degré de liberté ?

10 Cours 9 : Couple de variables aléatoires discrets

10.1 Loi conjointe, lois marginales

Definition 43. Loi de Probabilité d'un vecteur
Dans ce cours, $Z = (X, Y)$ désigne un couple de variables aléatoires discrètes définies sur **le même univers** Ω :

$$X(\Omega) = \{x_1, ..., x_q\}$$
$$Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$$

alors **loi de probabilité associée du couple** est définie par

$$p_{ij} = P(Z = (x_i, y_j)) = P((X, Y) = (x_i, y_j))$$

$$p_{ij} = P((X = x_i) \,\text{et}\, (Y = y_j))$$

il est commode de reporter ces valeurs dans un tableau.

X Y	y_1	y_2	y_3	.	.	.	y_j	.	y_p
x_1	p_{11}	p_{11}	.	.	.	.	p_{1j}	.	p_{1p}
x_2	p_{21}	p_{22}	.	.	.	.	p_{2j}	.	p_{2p}
x_3	p_{21}	.	.	.	.	.	p_{3j}	.	p_{3p}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_i	p_{i1}	.	.	.	.	.	p_{ij}	.	p_{ip}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_q	p_{q1}	.	.	.	.	.	p_{qj}	.	p_{qp}

Remarque 15.

En particulier
$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Remarque 16. Á partir de la loi du couple, nous pouvons retrouver les lois de X et de Y par :

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j=1}^{p} p_{ij}$$

$$P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_{i=1}^{q} p_{ij}$$

La loi p_Z est appelée **loi conjointe** du vecteur Z (car c'est la loi de toutes les coordonnées), tandis que chacune des lois p_X et p_Y des coordonnées de X et Y de Z sont appelées **lois marginales**.

Exemple 47. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On extrait successivement sans remise deux boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, 0 sinon. Et soit Y la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, 0 sinon. Déterminer la loi conjointe du couple et ses lois marginales.

10.2 Espérance d'un vad

Definition 44. Esperance d'un vecteur aléatoire
On dit que Z est **intégrable** si chacune de ses coordonnées est intégrable. L'espérance de Z est alors donnée par :

$$E(Z) = (E(X), E(Y))$$

. C'est le vecteur des espérances.

Exemple 48. Calculer le vecteur des espérances sur notre exemple.

10.3 Indépendance de vad

Definition 45. Définition de l'indépendance de deux vad
Les vad X et Y sont indépendantes ssi les évènements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ le sont pour tout i et j, c'est-à-dire

$$\forall i \quad \forall j \quad p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$$

Remarque 17. Loi jointe, loi marginale

Comme on l'a vu précédemment il est facile de déterminer les lois marginales quand on connait la loi du couple. En revanche en général il n'est pas simple connaissant les lois marginales de retrouver la loi du couple. Le seul cas particulier favorable c'est lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes puisque dans ce cas $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$

Exemple 49.

Reprenons l'exemple du début mais en faisant des tirages avec remise.

Exemple 50.

— Un joueur lance simultanément deux dés, soit X la variable aléatoire indiquant le résultat du premier dé et soit Y la variable aléatoire indiquant le résultat du deuxième. X et Y sont elles indépendantes ?
— Même question si X désigne la somme des dés et Y leur produit.

10.4 Opérations sur les variables aléatoires discrètes

Definition 46. Opérations sur les variables aléatoires : Addition ou produit par un nombre
Si X est une variable aléatoire définie sur $\Omega, P)$ et a et λ des réels.
Les variables aléatoires $X + a$ et λX sont définies sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega \ (X + a)(\omega) = X(\omega) + a \quad (\lambda X)(\omega) = \lambda X(\omega)$$

10.4.1 Somme et produit par un nombre

Definition 47. Opérations sur les variables aléatoires : Addition ou produit par un nombre
Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_q\}$ est l'univers image de X alors, $(X + a)(\Omega) = \{x_1 + a, x_2 + a, ..., x_q + a\}$
$(\lambda X)(\Omega) = \{\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_q\}$

$$P(X + a = x_i + a) = P(X = x_i) = P(\lambda X = \lambda x_i)$$

Exemple 51. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.2$, déterminer la loi de $3X$.

Definition 48. Opérations sur les variables aléatoires : Somme
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini (Ω, P)
La **somme** $Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

L'univers image de $Z = X + Y$ est constitué par les réels z_k du type $z_k = x_i + y_j$ Et on a $P(Z = z_k) = \sum p_{ij}$, la somme étant étendue à tous les couples (i, j) tels que $z_k = x_i + y_j$

Proposition 29. Opérations sur les variables aléatoires : Somme
La loi de $X + Y$ est déterminée par :
$\forall c \in (X+Y)(\Omega)$

$$P(X+Y=c) = \sum_{x \in X(\Omega) y \in Y(\Omega) x+y=c} P(X=x, Y=y)$$

$$P(X+Y=c) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=c-X)$$

$$P(X+Y=c) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=c-y, Y=y)$$

Proposition 30. Somme et indépendance
La loi de $X + Y$ est déterminée dans ce cas particulier par :
$\forall c \in (X+Y)(\Omega)$

$$P(X+Y=c) = \sum_{x \in X(\Omega) y \in Y(\Omega) x+y=c} P(X=x)P(Y=y)$$

$$P(X+Y=c) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)P(Y=c-X)$$

$$P(X+Y=c) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=c-y)P(Y=y)$$

Exemple 52. Déterminer la loi de $S = X + Y$ dans l'exemple 1.

Exemple 53. Si X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs μ et ν, déterminer la loi de $X + Y$ en supposant X et Y indépendantes.

Remarque 18. Remarques
Pour calculer $E(X + Y)$ il n'est pas nécessaire de connaitre la loi de X et la loi de Y puisque $E(X + Y)E(X) + E(Y)$.
En revanche attention $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ n'est vraie que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.
Il faut être vigilant sur le risque de confusion suivant : si X est une va, et X_1 et X_2 deux va indépendantes et de même loi que X alors :

$$E(2X) = E(X_1 + X_2)$$

mais

$$Var(2X = 4Var(X) \quad Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2Var(X)$$

10.4.2 Produit

Definition 49. Opérations sur les variables aléatoires : Produit
La variable aléatoire **produit** XY est la variable aléatoire définie sur Ω par

$$\forall \omega \in \Omega \quad (XY)(\Omega) = X(\omega)Y(\Omega)$$

L'univers image de $T = XY$ est constitué par les réels t_k du type $t_k = x_i y_j$ et on a $P(T = t_k) = \sum p_{ij}$, la somme étant étendue à tous les couples (i, j) tels que $t_k = x_i y_j$

Exemple 54. En reprenant l'exemple 1, déterminer la loi du produit $T = XY$.

10.5 Covariance, Corrélation et Indépendance

Definition 50. De plus si Z est de carré intégrable (i.e chacune de ses composantes l'est) , **la matrice de covariance** est donnée par :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Var(X) & Covar(X,Y) \\ Covar(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$

avec

$$Covar(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

(La matrice de variance est une matrice symétrique.)

Proposition 31. Covariance : expression simplifiée
La covariance de X et Y a pour expression simplifiée :

$$Covar(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Preuve 2. Preuve de l'expression simplifiée

$$Covar(X,Y) = E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

en utilisant la linéarité de l'espérance, donc

$$Covar(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Remarque 19. En pratique
Pour calculer $E(XY)$:

— on peut commencer par déterminer la loi du produit XY : $\forall c \in (XY)(\Omega) \quad P(XY = c) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega), xy = c} P(X = x, Y = y)$

— soit on calcule directement $E(XY) = \sum_{x\in X(\Omega) \quad y\in Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$

Exemple 55. Déterminer la matrice de covariance de notre exemple.

Propriété 11. Variance et Covariance

—
$$Covar(X, X) = Var(X)$$

—
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Covar(X, Y)$$

—
$$Covar(X, Y) = \frac{Var(X + Y) - Var(X) - Var(Y)}{2}$$

— (La Covariance est une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée est la variance)

Preuve 3.
$$Var(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

$$= Var(X) + Var(Y) - 2Covar(X, Y)$$

Definition 51. Variables aléatoires non corrélées
X et Y sont dites non corrélées si

$$Covar(X, Y) = 0$$

Proposition 32. Indépendance et Corrélation
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$Covar(X, Y) = 0$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Attention, ces relations peuvent être vérifiées sans que X et Y ne soient indépendantes.

Exemple 56. Contre-exemple
On tire au hasard un point dans le plan de coordonnées (X, Y) avec
X et Y qui sont des variables aléatoires.
On suppose qu'on a le choix équiprobable entre les points $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ $(0, -1)$.
Montrer que X et Y sont non corrélées quoique non indépendantes.

Proposition 33. Inégalité de Schwartz

$$|Covar(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Definition 52. Coefficient de corrélation
Le coefficient de corrélation est défini par

$$r = \frac{Covar(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

— il est tjs compris entre -1 et 1
— plus il est proche des extrêmes plus les va sont corrélées.

Remarque 20.

1. Si les va X et Y sont indépendantes alors $r = 0$.
2. Deux variables indépendantes sont non corrélées mais la réciproque est fausse.
3. Le coefficient de corrélation linéaire mesure la dépendance affine entre X et Y : ainsi si $|r| = 1$ alors il existe des constantes a et b telles que $Y = aX + b$. Démontrer cette propriété.

11 TD12

11.1 Exercice 1 : Couple de vecteurs

La loi jointe du vecteur (X, Y) est donnée ci-dessous

X Y	0	1	2	3
1	0.1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0.0	0.0	0.1
3	0.1	0.0	0.2	0.0

1. Donner les lois marginales de X et Y.
2. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
3. Calculer $P(XY = 6)$.
4. Déterminer la covariance.

11.2 Exercice 2 : Le ski

Dans une station de ski, on peut se rendre aux départs respectifs de deux pistes A et B par deux remontées mécaniques qui partent du même point D de la station.
Le nombre de skieurs qui se présentent en D pendant une heure est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On admet qu'on a atteint un régime stable tel que chacun des skieurs choisit indépendamment des précédents, A ou B avec des probabilités fixes p et $q = 1 - p$.
On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de skieurs qui choisissent la piste A pendant une heure, et N indiquant quant à elle le nombre de skieurs pendant une heure.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N) en calculant pour k et n entiers : $P(X = k \,\text{et}\, N = n)$. (Remarque : quelle condition avons nous sur les entiers n et k)
2. Déterminer la loi marginale de X en calculant, pour tout entier k $P(X = k)$. De quelle loi s'agit il ?
3. Calculer le nombre moyen de skieurs se présentant en une heure au départ de la piste A.

11.3 Exercice 3 : Autour de la loi géométrique

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^{\times}$, telles que :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

pour tous i,j de $\mathbb{N}^{\times}$.

1. Calculer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

11.4 Exercice 4 : La Marguerite (facultatif)

En terminant d'effeuiller la marguerite, on compte : 1 point pour un peu, 3 points pour beaucoup, 5 points pour passionnément, 10 points pour à la folie, 0 points pour pas du tout. On effeuille successivement deux marguerites. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenu avec la première marguerite. Soit Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y)
2. Préciser les lois marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
3. Déterminer la distribution de $Z = X + Y$
4. Déterminer la distribution de $T = XY$
5. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$, $E(X + Y)$, $V(X + Y)$, $E(XY)$, $V(XY)$, $Covar(X, Y)$, r.

11.5 Exercice 5 : Autour de la somme

1. Démontrer l'identité suivante sur les coefficients binomiaux appelée Identité de Vandermonde :
$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$$
2. En déduire que Si $X \simeq B(n, p)$ et $Y = \simeq B(m, p)$ avec X et Y indépendantes, alors
$$X + Y \simeq B(n + m, p)$$