TD : Calculs de Probabilités

Exercice 1 : Composant
Un composant électronique dispose de deux résistances , S_1 et S_2 , qui ont la même probabilité d'être utilisées. La probabilité que l'une des résistances au moins soit utilisée est 0.9 ; celle que les deux soient utilisées vaut 0.5 . Quelle est la probabilité :

1. que la résistance S_1 ne soit pas utilisée ?
2. que les deux résistances ne soient pas utilisées ?
3. que l'une des deux résistances au moins ne soit soit utilisée ?
4. qu'une seule résistance soit utilisée ?

Exercice 2 : Lave-linge
Un fabricant d'electroménager produit des lave-linge garantis pour une durée de deux ans. Des tests ont été effectués sur cent appareils afin de déterminer la résistance d'un certain nombre de pièces indépendantes. Les probabilités d'avoir à effectuer une réparation sont les suivantes :

- 3% pour l'électrovanne,
- 1% pour le pressostat,
- $2,5\%$ pour la pompe de vidange,
- 4% pour le programmateur,
- 2% pour la résistance.

Un lave-linge nécessite une réparation si l'une ou l'autre de ces pièces doit être réparée. La probabilité qu'un lave-linge nécessite une réparation dans les deux ans est-elle de ce fait inférieure à 5% ?

Exercice 3 : Tirage de boules dans une urne
Une urne contient 10 boules : 7 boules rouges et 3 boules noires indiscernables au toucher.

a) On extrait simultanément 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir 3 boules de la même couleur ?
b) On tire successivement 3 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges et une noire :
   -si le tirage s'effectue sans remise ?
   -si le tirage s'effectue avec remise ?
c) Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à extraire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir des boules de couleurs différentes (on donnera le résultat sous forme de fractions irréductibles)

Exercice 4 : Chiffres et jetons
Combien peut on former de nombres de trois chiffres avec les chiffres $1, 2, 3, 4, 5$ le même chiffre pouvant être utilisé plusieurs fois ?
On dispose de 10 jetons : 5 jetons portent le numéro 1, 4 jetons portent le numéro 2 et 1 jeton porte le numéro 3. On tire successivement et sans remise trois jetons.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre dont les trois chiffres sont deux à deux différents ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir 111 ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un des chiffres égal à 1 ?

Exercice 5 : Jeux de cartes
Dans un jeu de cartes de 32 cartes, on prélève simultanément 4 cartes, on obtient alors une main. On admet que les mains possibles sont équiprobables. Les familles sont les oeurs, les carreaux, les trèfles et les piques.
Calculer la probabilité d'obtenir dans une main respectivement :

a) quatre cartes de la même famille ?
b) Une carte de chaque famille ?
c) Exactement un as ?
d) Exactement deux as ?
e) Aucun as ?
f) Au moins un as ?
g) Deux coeurs, deux piques ?
h) Deux coeurs, un pique, un trèfle ?
i) Exactement deux coeurs et un as ?
j) Un carré, soit quatre cartes de la même valeur ?

Exercice 6 : Les Anniversaires
n étudiants sont dans un amphithéâtre.

1. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux étudiants soient nés le même jour ? (sachant que $n \geq 365$ et qu'on ne tient pas compte des années bisextiles)
2. Vérifier que si $n \geq 24$ alors la probabilité pour qu'au moins deux étudiants soient nés le même jour est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. C'est ce qu'on appelle le paradoxe des anniversaires.

Exercice 7 : Les Manteaux
10 personnes ont déposé leur manteau. Elles le reprennent par hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins huit personnes retrouvent leur manteau.

Exercice 8 : Fiabilité
Deux systèmes sont composés de la façon ci-dessous. La probabilité pour qu'un composant soit défectueux est égal à 0,05.

1. Figure 1 : Pour des raisons de fiabilité les composants A ont été triplés de telle sorte que pour que le système fonctionne il suffit qu'au moins un des composant fonctionne. Les système 1 est composé des trois composants placés en parallèle. Calculer la probabilité pour que le système de la figure 1 fonctionne.
2. Figure 2 : Le système 2 est composé du système 1 en serié avec le composant B. Calculer la probabilité pour que le système ne fonctionne pas sachant que la probabilité pour que B soit défectueux est égale à 0,02.

Exercice 7 : Alcootest
Un laboratoire a mis au point un alcootest. On sait que 2% des personnes contrôlées par la police sont en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :

- lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100, l'alcootest se révèle positif
- lorsqu'une personne n'est pas réellement en état d'ébriété, 96 fois sur 100, l'alcootest se révèle négatif

Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif ?

Exercice 8 : Sur Orion
Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% opposés et 24% sans opinion. Vous rencontrerez un habitant d'Orion :

- a) Quelle est la probabilité qu'il soit sans opinion
- b) Si il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un igolus ?
- c) Si il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Exercice 9 : Les menteurs
On considère n menteurs $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots, I_n$. I_1 reçoit l'information sous la forme "oui" ou "non", la transmet à I_2 et ainsi de suite jusqu'à I_n et I_n l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $p \in]0,1[$, transmet le contraire avec la probabilité $1-p$, et les réponses des n personnes sont indépendantes.

1. Notons A_n l'évènement "la n-ième personne transmet l'information initiale". Calculer la probabilité $p_n = P(A_n)$ (écrire $p_{n+1} = cp_n + d$).
2. Que se passe t'il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 10 : Le paradoxe de Monty Hall
On considère le jeu de stratégie suivant : un candidat se trouve face à trois portes numérotées de 1 à 3, un prix a été caché derrière l'une d'elles. Le candidat se trouve devant la porte 1. L'animateur (qui sait où se trouve le prix) ouvre une des deux portes 2 ou 3 et le candidat constate que le prix n'y est pas. Le candidat doit-il ouvrir la porte 1 ou changer de porte ?

1. Le candidat se trouve face à une éventualité de la forme $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ où ω_1 est le numéro de la porte qu'il veut ouvrir, ω_2 le numéro de la porte que le présentateur a ouvert et ω_3 le numéro de la porte derrière laquelle est le prix.

   Calculez la probabilité de chaque éventualité. (Pour ce faire utilisez un arbre et introduisez les évenements suivants : T_i : le prix a été caché derrière la porte i P_i : le présentateur ouvre la porte i J_i : le joueur ouvre la porte i.)
2. Quelle est la probabilité de gagner ?
3. Le candidat garde la porte 1. Quelle est la probabilité de gagner ?
4. Le candidat choisit systématiquement de changer de porte. Quelle est sa probabilité de gagner ?
5. Conclure.

Exercice 12 : Vrai/Faux
Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. Deux évènements indépendants sont disjoints.
2. Considérons trois évènements A, B, C,alors l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
3. Les évènements A et B suivants sont ils indépendants : on considère un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte dans une jeu de 32 cartes, soit A :" la carte obtenue est rouge", et B l'évènement : "la carte obtenue est une figure".

Exercice 13 : Un curieux problème d'indépendance
On lance n fois une pièce équilibrée (avec $n \geq 2$) et on considère les évènements suivants :
A :"on obtient au plus une fois pile" B : "on obtient toujours le même résultat".
Les évènements A et B sont ils indépendants ?

Exercice 14 : Marche aléatoire
Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). A chaque instant, elle fait un bond de 1 avec la probabilité p ($0 < p < \frac{1}{2}$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n, on a : $x_{n+1} = x_n + 1$ avec la probabilité p et $x_{n+1} = x_n - 1$ avec probabilité $q = 1 - p$. Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction $alea()$ qui "retourne un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$."Comment interpretez vous cette expression ?
2. Écrire un algorithme qui simule cette marche aléatoire. En particulier, cet algorithme prendra en entrée l'abscisse a de départ, la longueur N du segment, et produira en sortie un message indiquant si la marche s'arrête en 0 ou en N, et le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête. On supposera qu'on dispose d'une fonction $alea()$ qui retourne un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0.
   (a) Que vaut u_0 ? u_N ?
   (b) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$
   (c) En déduire l'expression exacte de u_a.
4. On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en N. Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.
5. Calculer $u_a + v_a$.
6. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 15 : n Urnes
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $n - k$ boules blanches. On choisit au hasard une des n urnes puis on tire successivement avec remise deux boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
2. Même question si le tirage s'effectue sans remise ?
3. En déduire les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini.
4. Qu'en concluez vous ?