RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Objectifs

- **Savoir trouver les éléments propres d'un endomorphisme.**
- **Savoir diagonaliser, trigonaliser une matrice.**
- **Savoir appliquer la diagonalisation, la trigonalisation.**

Dans tout ce chapître, n est un entier naturel non nul, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E l'endomorphisme identité de E et 0_E le vecteur nul de E.

1 Valeurs propres et vecteurs propres

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de ϕ s'il existe un vecteur $u \in E$, non nul, tel que :

$$\phi(u) = \lambda u$$

Un tel vecteur est appelé vecteur propre de la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de ϕ s'appelle le spectre de ϕ et se note $Sp(\phi)$.

Exemple 1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f(e_1) = e_1 - e_2 - e_3 \quad ; \quad f(e_2) = -e_1 + e_2 - e_3 \quad ; \quad f(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3$$

Montrer que le vecteur $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$.
De même, montrer que les vecteurs $u_2 = e_1 - e_3$ et $u_3 = e_2 - e_3$ sont associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.
Montrer alors que tout vecteur u, combinaison linéaire de u_2 et u_3 est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$.

Définition 2. si λ est une valeur propre de ϕ, on appelle sous-espace propre associée à λ, l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $\phi(u) = \lambda u$, c'est-à-dire le noyau de l'endomorphisme $\phi - \lambda Id_E$ (c'est donc un s.e.v. de E).

Remarque : si λ est une valeur propre de ϕ, alors 0_E est dans le sous-espace propre associé, mais ce n'est pas un vecteur propre. Le fait que λ soit une valeur propre de E équivaut à ce que $Ker(\phi - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$, ou encore à ce que $\phi - \lambda Id_E$ n'est pas inversible.
Pourquoi $\phi - \lambda Id_E$ n'est-elle pas inversible ?

Rappel : Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$, dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A, alors ϕ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

1.2 Equation et polynôme caractéristiques

Soit ϕ de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans la base $\mathcal{B}$, les valeurs propres de ϕ sont donc les valeurs λ telles que le déterminant de la matrice de $A - \lambda I_n$ soit nul (en notant I_n l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la multiplication).

Définition 3. On appelle équation caractéristique de ϕ, l'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 4. On appelle polynôme caractéristique de la matrice A, le polynôme obtenue en développant le déterminant :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire que $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Proposition 1. P est un polynôme de degré n.

Exemple 2. Reprendre l'exemple 1 puis déterminer le polynôme caractéristique associé à f. Qu'en pensez vous ?

Rappels

- On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$A = PA'P^{-1}$$
- Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases éventuellement différentes.

Proposition 2. Si A et A' sont deux matrices représentant le même endomorphisme ϕ dans deux bases de E, alors elles ont même polynôme caractéristique.

Démonstration A faire

Définition 5. on peut donc appeler ce polynôme, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme ϕ.

Remarque 1. D'après ce qui précède, les valeurs propres de ϕ sont donc les racines de son polynôme caractéristique.

Définition 6. si une valeur propre λ est une racine de multiplicité r du polynôme caractéristique, on dit que c'est une valeur propre de multiplicité r.

Proposition 3. Un endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$, a au plus n valeurs propres (les valeurs propres n'étant pas supposées distinctes).

Proposition 4. Soit λ une valeur propre de multiplicité r de l'endomorphisme ϕ. Soit E_λ le sous-espace propre associé. Alors

$$1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant r$$

Démonstration : soit $m \geqslant 1$ la dimension de E_λ et soit $(f_1, f_2, ..., f_m)$ une base de E_λ complétée par des vecteurs $(f_{m+1}, ..., f_n)$ en une base de l'espace E. Dans la base ainsi constituée, ϕ est représenté par une matrice de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\lambda \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{m \text{ colonnes}}} & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} \\
0 & \lambda & \dots & 0 & a_{2(m+1)} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \lambda & a_{m(m+1)} & \dots & a_{mn} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} & \dots & a_{(m+1)n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{n(m+1)} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right)$$

En développant le déterminant $\det(A - XI_n)$ successivement par rapport aux m premières colonnes, on voit que le polynôme caractéristique est de la forme $(X-\lambda)^m Q(X)$. Cela prouve que λ est une racine de multiplicité supérieure ou égale à m.

2 Diagonalisation

2.1 Condition de diagonalisabilité

Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$, supposons que $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de ϕ. Alors la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ sera diagonale, les éléments diagonaux étant les valeurs propres de ϕ. Inversement, il est clair que si la matrice de ϕ dans une base est diagonale, alors cette base est constituée de vecteurs propres.

Exemple : reprenons l'endomorphisme de l'exemple précédent, et soit $u_1 = (2, 1)$ et $u_2 = (1, 1)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Qu'elle est la matrice de ϕ relativement à la base (u_1, u_2) ?

Exemple 3. Faites de même avec la matrice de l'exemple 2.

Définition 7. on dit qu'un endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si on peut trouver une base de E formée de vecteurs propres, c'est-à-dire , s'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de ϕ est diagonale.

Définition 8. on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit A est diagonalisable ssi il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale.

Proposition 5. Si les vecteurs $W_1, W_2, ..., W_m$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_m$ de l'endomorphisme ϕ, alors la famille $(W_1, W_2, ..., W_m)$ est libre.

Démonstration : l'idée est la suivante : prenons par exemple deux vecteurs propres W_1 et W_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2.
Démontrer que la propriètè est vrai pour W_1 et W_2 .
Pour faire une démonstration correcte, on fait une récurrence sur m : on commence par vérifier que c'est vrai pour $m = 1$, puis on montre la récurrence en utilisant l'idée ci-dessus (exercice)

On peut en déduire le théorème suivant :

Théorème 6. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ et d'espaces propres associés $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, ..., E_{\lambda_m}$ alors ϕ est diagonalisable ssi,

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + ... + \dim E_{\lambda_m} = \dim E$$

ou encore, ϕ est diagonalisable ssi,

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_m} = E$$

On a donc obtenu les résultats suivants, pour $\phi \in \mathcal{L}(E)$:

- La somme des multiplicités des valeurs propres de ϕ est inférieure ou égale à n (car le polynôme caractéristique est de degré n).
- La multiplicité d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension de l'espace propre associé.
- L'endomorphisme est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Exemple 4. Que peut-on dire des applications linéaires dont les polynômes caractéristiques sont :

- $P_1 = (x-1)(x-2)(x-3)$
- $P_2 = (x-1)^2(x-2)$

- $P_3 = (x-1)^3$
- $P_4 = (x-1)(x^2+x+1)$

Théorème 7. Un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi

1. si la somme des multiplicités des racines est égale à n
2. et si la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

Corollaire 8. Si un endomorphisme de E admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Démonstration : chaque valeur propre est de multiplicité 1 (sinon la somme des multiplicités serait strictement supérieure à n) et donc son sous-espace propre associé est aussi de dimension 1 (puisqu'il est de dimension inférieure ou égale à 1 et qu'il ne peut pas être de dimension 0), donc la deuxième condition du théorème est vérifiée.
La première condition du théorème est aussi vérifiée puisque ϕ admet n valeurs propres de multiplicité 1.
Remarque Si ϕ est diagonalisable de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, si $\mathcal{B}'$ est une base de vecteurs propres. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de P est constituée d'un vecteur propre associé à la valeur propre que nous noterons λ_j. On a alors :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est la matrice diagonale dont le terme diagonal de la $j^{\text{ème}}$ colonne est λ_j. Cette décomposition n'est pas unique, mais il faut bien faire attention à ce que l'ordre des valeurs propres dans D respecte l'ordre des vecteurs propres dans P.

Exemple 5. Etudier les matrices :

1. $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
2. $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Pour $\theta \neq k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$,
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2.2 Exemples d'applications

1. Calcul de A^n. Si A est une matrice diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D, telles que $A = PDP^{-1}$. On en déduit facilement que $A^n = PD^nP^{-1}$. Or il est très facile de calculer D^n, pour cela il suffit d'élever les termes diagonaux à la puissance n.
   Ceci permet entre-autres d'étudier des suites récurrentes (voir feuille d'exercices)

2. Résolution de systèmes différentiels Supposons que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, c'est-a-dire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P.D.P^{-1}$ où D est une matrice diagonale.

   Soit
$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$
   où x_1, x_2,...,x_n sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose,
$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$
   Posons $Y = P^{-1}X$ (c'est-à-dire $X = PY$). $X' = A.X \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY$. Il suffit donc de résoudre le système $Y' = DY$ puis de calculer $X = PY$. Remarquons que l'on n'a pas besoin de calculer P^{-1} !
   Voir exemple en TD.

3 Trigonalisation

3.1 Matrice triangulaire

Les matrices triangulaires sont moins simples que les matrices diagonales, mais elles restent néanmoins parmi les plus simples à étudier. En particulier dans la résolution des systèmes linéaires, les systèmes triangulaires sont faciles à résoudre.

Définition 9.

- une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est triangulaire inférieure ssi $a_{ij} = 0$ lorsque $j > i$
- une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est triangulaire supérieure ssi $a_{ij} = 0$ lorsque $j < i$.

Proposition 9.

- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est égal au produit de ses termes diagonaux.
- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) sont les termes diagonaux.

Dans la suite on s'intéressera surtout aux matrices triangulaires supérieures, et lorsque que l'on utilisera le terme matrice triangulaire sans précision, il s'agira d'une matrice triangulaire supérieure.

3.2 Condition de trigonalisabilité

Définition 10. on dit qu'un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de ϕ dans cette base est triangulaire.

Définition 11. on dit qu'une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Par conséquent, il est clair qu'un endomorphisme est trigonalisable ssi sa matrice relativement à une base donnée est triangulaire.

Théorème 10. Un endomorphisme de E est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé, c'est-à-dire s'il peut se factoriser sous la forme $P(\lambda) = \alpha \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda i)$.

Remarque : dans la formule ci-dessus, les λ_i ne sont pas forcément distinctes.

Théorème 11. Théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé.

Corollaire 12. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

Attention : dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ce résultat n'est plus vérifié. Par exemple, considérer la matrice étudiée précédemment : pour $\theta \neq k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exemple : trigonaliser l'endorphisme ϕ de matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

4.1 Définitions

Définition 12. soit P le polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré d défini par :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i x^i$$

alors

- soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$, le <u>polynôme d'endomorphisme</u> $P(\phi)$ est l'endomorphisme,

$$P(\phi) = \alpha_0 Id_E + \alpha_1 \phi + ... + \alpha_d \phi^d$$

- soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, <u>le polynôme de matrice</u> $P(M)$ est la matrice,

$$P(M) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + ... + \alpha_d M^d$$

Attention : les puissances de ϕ sont à prendre au sens de la composition des applications. Par exemple $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$.

On peut montrer les propriétés suivantes :

Proposition 13. soit P, Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\phi \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $(P + Q)(\phi) = P(\phi) + Q(\phi)$
- $(\alpha P)(\phi) = \alpha P(\phi)$
- $(PQ)(\phi) = P(\phi) \circ Q(\phi) = Q(\phi) \circ P(\phi) = (QP)(\phi)$

Remarque : la composition des endomorphismes n'est pas commutative, mais on a malgré tout toujours $P(\phi) \circ Q(\phi) = Q(\phi) \circ P(\phi)$.

Exemple 6. soit $P = X^2 - 2X + 1$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $P(M)$.

4.2 Polynômes annulateurs

Définition 13. soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ et soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que P est un <u>polynôme annulateur</u> de ϕ si $P(\phi)$ est l'endomorphisme nul noté 0.

Exemple 7.

- ϕ est un projecteur de E si $\phi \circ \phi = \phi$, c'est-à-dire si $\phi^2 - \phi = 0$, donc $P(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur de ϕ.

- ϕ est une symétrie de E si $\phi \circ \phi = Id_E$, c'est-à-dire si $\phi^2 - Id_E = 0$, donc $P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de ϕ.
- soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Un polynôme annulateur de ϕ est $P(x) = (x-1)(x-2)$.
- $P = x^2 - 2x + 1$ est un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (voir exemple ci-dessus).

Remarque : évidemment si P est un polynôme annulateur de $\phi \in \mathcal{L}(E)$ alors tout polynôme de la forme $P.Q$ où Q est un polynôme quelconque, est aussi un polynôme annulateur de ϕ.

Définition 14. un endormorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent d'ordre $p \geqslant 1$ ssi P défini par $P(x) = x^p$ est un polynôme annulateur de ϕ et pas Q défini par $Q(x) = x^{p-1}$, autrement dit ssi ϕ^p est l'endomorphisme nul, mais si ϕ^{p-1} n'est pas identiquement nul.

Exemple : vérifier que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotent d'ordre 3.

Théorème 14. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de ϕ. Si λ est une valeur propre de ϕ alors λ est racine de P (mais attention toutes les racines de P ne sont pas forcément des valeurs propres de ϕ).

Démonstration :

1. Démontrer par récurrence que que si u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de ϕ, alors $\phi^k(u) = \lambda^k u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. soit P est le polynôme défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, calculer $P(\phi)(u)$
3. Conclure

Remarque : ceci signifie que si on connaît un polynôme annulateur P de ϕ alors les valeurs propres de ϕ se trouvent forcément parmi les racines de P. En particulier, par exemple, les valeurs propres d'un projecteur ne peuvent être que 0 ou 1, et la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.

Théorème 15. Un endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur de ϕ scindé et ayant toutes ses racines simples.

Corollaire Les projecteurs et les symétries de E sont diagonalisables.

Rappels

- **Projecteurs** : soit $p \in \mathcal{L}(E)$, p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas p est le projecteur de E sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p = \{x \in E,\ p(x) = x\} = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) = E_1$, c'est à dire que $\mathrm{Im}p$ est l'ensemble des vecteurs invariants. De plus $\mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p = E$.

- **Symétries** : soit $s \in \mathcal{L}(E)$, s est une symétrie vectorielle si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ où Id_E est l'application identité de E. Alors s est la symétrie par rapport à $F = \{x \in E,\ s(x) = x\} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) = E_1$ parallèlement à $G = \{x \in E,\ s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) = E_{-1}$. De plus $E_1 \oplus E_{-1} = E$

Théorème 16 (Théorème de Cayley-Hamilton).
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme annulateur de ϕ.

Exemple Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On pourra vérifier que $P(A)$ est la matrice nulle, où P est défini par $P(x) = (x-1)(x-2)$.

Remarque : le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur, mais ce n'est pas forcément le polynôme annulateur de degré minimal. Si on reprend l'exemple déjà étudié, où ϕ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est $P(x) = (x-1)(x-2)^2$, mais on a un polynôme annulateur de degré 2 qui est $(x-1)(x-2)$. Par contre un polynôme annulateur est au moins de degré 2, puisqu'il a forcément comme racines 1 et 2. Le polynôme $(x-1)(x-2)$ est appelé polynôme minimal de ϕ.
De façon générale, on a le résultat suivant,

Théorème 17. Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme annulateur unitaire P_{min} tel que tout polynôme annulateur de φ est un multiple de P_{min} (c'est-à-dire que si P est un polynôme annulateur de φ alors il existe un polynôme Q tel que $P = QP_{min}$). Ce polynôme est appelé polynôme minimal de φ.

Rappel Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient du monôme de plus haut degré est égal à 1.
Par exemple $X^2 - 3X + 1$ est unitaire mais pas $2X^2 - 3X + 1$.

Exercices

Exercice 1

1. Rappeler le théorème du rang.

2. Parmi les matrices suivantes lesquelles sont inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 2</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies ?

1. Soit $u \neq 0_E$, si u est invariant par φ, alors u est un vecteur propre de φ.
2. Soit $u \neq 0_E$, si $u \in \mathrm{Ker}\varphi$, alors u est un vecteur propre de φ.
3. Si λ est une valeur propre de φ alors $\varphi - \lambda I_E$ est inversible.
4. Si λ est une valeur propre de φ alors $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda I_E) \neq \{0_E\}$.
5. Si φ a pour matrice A relativement à une base $\mathcal{B}$ de E, alors $\det A = 0$ ssi 0 est valeur propre de φ.
6. Si u est un vecteur propre de φ alors u est un vecteur propre de $\varphi \circ \varphi$.
7. Si λ est une valeur propre de φ alors λ est une valeur propre de $\varphi \circ \varphi$.

<u>Exercice 3</u> Soit (v_1, v_2, v_3) une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que : $\varphi(v_1) = 2v_1, \varphi(v_2) = v_1 + v_2,\ \varphi(v_3) = -v_3$. Justifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de φ relativement à cette base.

<u>Exercice 4</u>

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre 3. Montrer que pour tout $u_0 \in E$ tel que $\varphi^2(u_0) \neq 0_E$, $(\varphi^2(u_0), \varphi(u_0), u_0)$ est une base de E et donner la matrice de φ relativement à cette base.

<u>Exercice 5</u> Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un s.e.v. V de E est stable par φ si $\varphi(V) \subset V$.

1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et φ un endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
Déterminer deux s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ stables par φ.
2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et φ un endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
Trouver un sous espace vectoriel $F \subset E$ stable par φ qui contient $(0, 0, 0, 1)$ et tel que $F \neq E$.

Exercice 6

On imagine deux îles voisines isolées du reste du monde qui n'ont d'échanges de population qu'entre elles. On suppose que, d'une année sur l'autre, l'île "Azur" conserve 80% de sa population et accueille 20% des habitants de l'île "Beauté" (mariages par exemple).
On suppose aussi la stabilité de cet échange pendant un certain nombre d'années et, sur chaque île, le solde naissance-décès est nul.
On note a_n la population de l'île "Azur" au début de l'année $2000+n$ et b_n désigne la population de l'île "Beauté" au début de l'année $2000+n$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n (sous forme matricielle). Calculer les populations de "Azur" et "Beauté" au début de 2005 et 2025, sachant qu'au début de l'année 2000, "Azur" a 2000 habitants et "Beauté" en a 1000.

Exercice 7

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

Exercice 8

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, diagonaliser A et en déduire A^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la relation $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$ peut se mettre sous la forme :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$
En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0, u_1.

Exercice 9

1. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice $\begin{pmatrix} i & 4i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
2. Trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 10 Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. M est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que M est semblable à :
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Décomposer T sous la forme $D + N$ où N est nilpotente et D est diagonale. Vérifier que D et N commutent en déduire T^n, puis M^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 11</u>

Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme de matrice,
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

<u>Exercice 12</u>

Soit,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $-A^3 + 5A^2 - 6A + 3I_3 = 0$.

2. En déduire A^{-1}.

<u>Exercice 13</u>

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique soit u l'endomorphisme de matrice A,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 en fonction de A. En déduire pour tout $n \geqslant 1$ une expression de A^n en fonction de A.

2. Déterminer le polynôme minimal de A, en déduire que A est diagonalisable.

3. Calculer $\dim \ker A$.

4. Trouver le polynôme caractéristique de A.

5. Trouver une base qui diagonalise la matrice A.

<u>Exercice 14</u> Soit $E = \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$. On note 0_E le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$ et Id_E l'endomorphisme identité de E. On dit qu'un endomorphisme φ de E est anti-involutif si $\varphi^2 = -\mathrm{Id}_E$. Soit φ un endomorphisme anti-involutif de E et A la matrice de φ relativement à la base canonique de E.

1. Déterminer un polynôme annulateur de φ, φ admet-il des valeurs propres (réelles) ? φ est-il diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse en fonction de A.
3. Déterminer $\ker \varphi$.
4. Si $u \neq 0_E$, montrer que $(u, \varphi(u))$ est une famille libre de E.
5. Calculer A^n en fonction de A, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (distinguer le cas n pair et le cas n impair).
6. Si p est impair, pourquoi n'existe-t-il pas d'endomorphisme anti-involutif de $\mathbb{R}^p$?
7. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que l'endomorphisme φ de matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, est un endomorphisme anti-involutif de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer A^{-1}.
   (c) Soit $u \neq (0, 0)$. Montrer que $(u, \varphi(u))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de φ relativement à cette base.
   (d) On considère la suite de terme général $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ définie par :
   $$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}$$
   avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. calculer U_n en fonction de n (distinguer le cas n pair et le cas n impair).