Espaces euclidiens

Dans tout ce chapître, n est un entier naturel non nul, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E l'endomorphisme identité de E et 0_E le vecteur nul de E.

1 Formes bilinéaires symétriques

1.1 Définitions et exemples

Définition 1. une application

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$$

est appelée forme bilinéaire lorsque

1. $\forall x_1, x_2, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda\varphi(x_2, y).$
2. $\forall x, y_1, y_2 \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda\varphi(x, y_2).$

(1. est la linéarité à gauche et 2. est la linéarité à droite).
On dit que φ est symétrique lorsque

$$\forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Remarque Si φ est symétrique, pour montrer que φ est bilinéaire, il suffit de montrer que φ est linéaire à droite ou à gauche, c'est-à-dire qu'il suffit de montrer 1. ou 2. et non pas 1. et 2..

Exemple 1.
1. Dans $\mathbb{R}^n$, soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, montrer que l'on définit une forme bilinéaire symétrique en posant,

$$< x \mid y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

c'est le produit scalaire usuel que l'on note plus simplement $x.y$.

2. Dans $\mathcal{C}([a, b])$, montrer que l'on définit une forme bilinéaire symétrique en posant :

$$< f \mid g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$$

3. Si E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}$, $2-\pi$ périodique et à valeurs réelles, l'application

$$< f \mid g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

est une forme bilinéaire symétrique.

1.2 Matrices d'une forme bilinéaire symétrique

On suppose dans ce paragraphe que E est de dimension $n \in \mathbb{N}*$. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.

Définition 2. On dit qu'une matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$. La matrice de ϕ est la matrice symétrique $n \times n$ qui a pour coef de la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne le nombre $\phi(e_i, e_j)$.

Exemple 2. Donner la matrice de la forme bilinéaire suivante :
$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 4x_2y_2 \end{cases}$

Proposition 1. Soient x et y des éléments de E et X et Y leurs vecteurs coordonnées. Alors

$$\phi(x, y) = {}^t XMY$$

Proposition 2. changement de base pour les formes bilinéaires Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}'$ est :

$${}^t PMP$$

Exemple 3. Soit ϕ la forme bilinéaire de l'exemple précédent. Ecrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$ composé des vecteurs $e'_1 = (1, 1)$ et $e'_2 = (0, -1)$

2 Produit scalaire

Définition 3. On appelle produit scalaire sur E, une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire qu'elle vérifie de plus :

1. $\varphi(x, x) \geqslant 0, \ \forall x \in E$
2. $\varphi(x, x) = 0$ ssi $x = O_E$

Remarque 1. Si la forme bilinéaire ne vérifie que le 1) on dit de ϕ est positive (mais pas définie positive).

Exemple 4. Les formes bilinéaires de l'exemple précédent sont des produit scalaires.

Proposition 3. **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** Si φ est un produit scalaire sur E, alors

$$\forall x, y \in E, \ |\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x, x)}\sqrt{\varphi(y, y)}$$

Démonstration $\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 \varphi(x, x) + 2\lambda\varphi(x, y) + \varphi(y, y)$ est un polynôme en λ toujours positif ou nul, donc son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire

$$4\varphi(x, y)^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leqslant 0$$

ce qui démontre le résultat.

Exemple 5. Appliquer cette inégalité aux 3 produits scalaire de l'exemple 1.

Définition 4. on appelle norme sur E une application $\mathcal{N}$ de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. $\forall x \in E,\ \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$.
3. $\forall x, y \in E,\ \mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Exemple 6. Donner la norme associée aux 3 produits scalaire de l'exemple 1.

Proposition 4. Si φ est un produit scalaire sur E, alors l'application $\mathcal{N}$ de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall x \in E,\ \mathcal{N}(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme de E, c'est la norme associée au produit scalaire φ.

Démonstration :

1. φ est définie positive, donc $\sqrt{\varphi(x,x)} = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
2. $\sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 \varphi(x,x)} = |\lambda| \sqrt{\varphi(x,x)}$.
3. $$\begin{aligned} \varphi(x+y, x+y) &= \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &\leqslant \varphi(x,x) + 2\sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)} + \varphi(y,y) \end{aligned}$$
   d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où,
   $$\varphi(x+y, x+y) \leqslant (\sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)})^2$$
   Ce qui démontre le résultat.

Notation : on notera $< x \mid y >$ le produit scalaire $\varphi(x,y)$ et $||x||$ la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 5.
On appelle espace vectoriel euclidien un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple 7. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel est-il un espace euclidien ? $\mathcal{C}([a,b])$ muni du produit scalaire est-il un espace euclidien ?

3 Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe $(E, < \mid >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n. La norme associée au produit scalaire $< \mid >$ est notée $|| \, ||$.

Définition 6. soient x et y deux vecteurs de E, on dit que x et y sont <u>orthogonaux</u> lorsque $< x \mid y >= 0$.

Théorème 5. (**théorème de Pythagore**) Si les vecteurs x et y sont orthogonaux alors ,

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Démonstration : il suffit de développer $||x+y||^2 =< x+y \mid x+y >$.

Exemple 8. Écrire le théorême de pythagore pour

Proposition 6. Une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux est une famille libre.

Démonstration Soients $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, supposons que :

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p = 0_E$$

alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$,

$$< x_i \mid \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p >= 0$$

en développant et en utilisant l'orthogonalité des vecteurs, on obtient,

$$\lambda_i < x_i \mid x_i >= 0$$

puisque $< x_i \mid x_i >\neq 0$, on en déduit que $\lambda_i = 0$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$.

Théorème 7. soit F un sous espace vectoriel de E, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F est un sous espace vectoriel de E qui est appelé orthogonal de F. Il est noté $F^\perp$. De plus F et $F^\perp$ sont supplémentaires, c'est-à-dire,

$$F^\perp \oplus F = E$$

$F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.
On a aussi,

$$(F^\perp)^\perp = F$$

Définition 7. soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle <u>projecteur</u> <u>orthogonal</u> sur F, noté p, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$., c'est-à-dire que p vérifie $p \circ p = p$, Ker $p = F^\perp$, Im p =Ker $(p - Id_E) = F$.

Théorème 8. Soient F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F, alors pour tout $x \in E$:

- $x - p(x) \in F^{\perp}$.
- $$||x - p(x)|| = \min_{y \in F} ||x - y||$$

  Cette quantité est appelée la distance de x au sous-espace F, elle est notée $d(x, F)$.
- Le projeté $p(x)$ est l'unique élément $z \in F$ tel que ,

  $$||x - z|| = \min_{y \in F} ||x - y||$$

Démonstration

- $\forall x \in E$, $x - p(x) \in \ker p = F^{\perp}$.
- Soit $y \in F$, $p(x) - y \in F$ donc $p(x) - y$ est orthogonal à $x - p(x)$, donc d'après le théorème de Pythagore :
  $$||x - y||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2 \geqslant ||x - p(x)||^2$$
- Soit $z \in F$, tel que $||x - z|| = ||x - p(x)||$, alors comme ci-dessus, $p(x) - z$ est orthogonal à $x - p(x)$ et donc,
  $$||x - z||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - z||^2$$
  donc $||p(x) - z|| = 0$ et donc $p(x) = z$.

4 Bases orthonormées

Dans tout ce paragraphe $(E, < \mid >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n. La norme associée au produit scalaire $< \mid >$ est notée $|| \, ||$.

Définition 8. on appelle base <u>orthogonale</u> de E, une base de E formée de vecteurs deux à deux orthogonaux . La base sera <u>orthonormée</u> si de plus les vecteurs de la base sont de norme 1.

Proposition 9. Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E, si x a pour coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et y a pour coordonnées $(y_1, y_2, ..., y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, en notant X le vecteur colonne des coordonnées de x et Y le vecteur colonne des coordonnées de Y, on a,

- $< x | \, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t X Y$.

- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Démonstration Exercice facile.

Proposition 10. Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x \mid e_i > e_i$$

autrement dit, les coordonnées de x sons la base $\mathcal{B}$ s'obtiennent en effectuant les produits scalaires $< x \mid e_i >$.

Démonstration : soit,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$,

$$< x \mid e_j >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < e_i \mid e_j >= \lambda_j$$

Théorème 11. Soit F un sous-espace vectoriel de E, de base orthonormée $(e_1, .., e_k)$, alors l'application p définie par :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} < e_i \mid x > e_i$$

est le projecteur orthogonal sur F, c'est-à-dire le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Démonstration

- Il est clair que p est une application linéaire.
- On peut remarquer que $p(e_i) = e_i$ car $(e_1, .., e_k)$ est orthonormée, donc

$$p(p(x)) = p(\sum_{i=1}^{k} < e_i \mid x > e_i) = \sum_{i=1}^{k} < e_i \mid x > p(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} < e_i \mid x > e_i = p(x)$$

  donc p est un projecteur.

- Reste à montrer que $\operatorname{Im} p = F$ et $\ker p = F^{\perp}$. Par construction $\operatorname{Im} p \subset F$. On a aussi $p(e_i) = e_i$ donc $e_i \in \operatorname{Im} p$ pour tout i, donc $F \subset \operatorname{Im} p$ donc $\operatorname{Im} p = F$. Soit $x \in F^{\perp}$, alors

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} < e_i \mid x > e_i = 0_E$$

donc $F^{\perp} \subset \ker p$. Réciproquement si $x \in \ker p$, alors

$$0_E = p(x) = \sum_{i=1}^{k} < e_i \mid x > e_i$$

et donc $< e_i \mid x >= 0$ pour tout $\forall i \in [\![1, k]\!]$, car $(e_1, ..., e_k)$ est une famille libre. Soit $y \in F$, $y = \sum_{i=1}^{k} y_i e_i$ et $< y \mid x >= \sum_{i=1}^{k} y_i < e_i \mid x >= 0$.

Remarque Le théorème précédent reste vrai si E n'est pas de dimension finie mais F reste de dimension finie.

Exemple 9. Montrer que les fonctions $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$, forment une famille orthonormée pour le produit scalaire des séries de Fourier et retrouver l'expression des coefficients de Fourier.

Théorème 12. (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soit $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ une base de E. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \in \operatorname{Vect}(v_1, ..., v_i) \tag{4.1}$$

Démonstration : elle se fait par récurrence sur n, à l'aide des idées suivantes qui fournissent une méthode effective de calcul.

- On pose

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$

- Tant que $k < n$, ayant construit une base orthonormée $(e_1, ..., e_k)$ de $F_k = \operatorname{Vect}(v_1, ..., v_k)$, on détermine e_{k+1} de la façon suivante :
  - on calcule :

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < e_i \mid v_{k+1} > e_i$$

  w_{k+1} est donc orthogonal à F_k.
  - on pose :

$$e_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{||w_{k+1}||}$$

La famille ainsi obtenue est une base orthonormée de $F_{k+1} = \operatorname{Vect}(v_1, ..., v_{k+1})$. Finalement, $F_n = E$ et on a obtenu une base orthonormée de E qui satisfait (4.1).

5 Application : droite de régression linéaire, méthodes des moindres carrés

On dispose d'un nuage de points (x_i, y_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 2$. On cherche la droite d'équation $y = \alpha + \beta x$ qui passe "au plus près" des points (x_i, y_i). Plus précisément on cherche α, β de sortes que :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2} \text{ soit minimal}$$

Remarque : cela revient à chercher α, β de sortes que : $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2$ soit minimal, d'où le nom de méthode des moindres carrés. En posant $d_i = y_i - (\alpha + \beta x_i)$, les d_i sont illustrés par la figure ci-dessous. On pose :

$$u_1 = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$$

$$u_2 = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

On cherche donc α, β de sortes que $||Y - (\alpha u_1 + \beta u_2)||$ soit minimal. On considère le s.e.v. $V = Vect(u_1, u_2)$. On sait que :

$$\min_{v \in V} ||Y - v|| = ||Y - P(Y)||$$

où P est le projecteur orthogonal sur V, donc $\alpha u_1 + \beta u_2 = P(Y)$. Le but va être maintenant de calculer $P(Y)$. Pour cela, on va utiliser les notations suivantes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ valeur moyenne des } x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i, \text{ valeur moyenne des } y_i$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \text{ valeur moyenne des produits } x_i y_i$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} \text{ l'écart-type des } x_i$$

$$Var(x) = \sigma_x^2$$

$$cov(x, y) = \overline{xy} - \bar{y}\bar{x} \text{ la covariance des vecteurs } y \text{ et } x$$

$$\rho(x, y) = \frac{cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \text{ le coefficient de corrélation de } x \text{ et } y$$

Remarque On retrouve les mêmes notions que celles vues en probabilité : il suffit de remplacer l'espérance par la moyenne, lorsque l'on travaille sur des séries de données et non plus sur des variables aléatoires.

Si les x_i ne sont pas tous égaux, la famille (u_1, u_2) est une famille libre, et donc une base de V. On va maintenant utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de V.

$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{1}{n} u_1$$

$$w = u_2 - < u_2, v_1 > v_1 = u_2 - \bar{x} u_1 = (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, ..., x_n - \bar{x})$$

d'où

$$||w|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{n}\sigma_x$$

alors

$$v_2 = \frac{w}{||w||} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x}(x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, ..., x_n - \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} u_2 - \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} \bar{x} u_1$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
P(Y) &= < Y, v_1 > v_1 + < Y, v_2 > v_2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} u_1 + < Y, \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} u_2 - \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} \bar{x} u_1 > \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} u_2 - \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} \bar{x} u_1 \right) \\
&= \left(\bar{y} - < Y, \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} u_2 - \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} \bar{x} u_1 > \frac{\bar{x}}{\sqrt{n}\sigma_x} \right) u_1 + < Y, \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} u_2 - \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} \bar{x} u_1 > \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x} u_2 \\
&= \left(\bar{y} - \frac{\bar{x}}{n\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n y_i x_i + \frac{\bar{x}^2}{n\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n y_i \right) u_1 + \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{n\sigma_x^2} - \frac{\bar{x} \sum_{i=1}^n y_i}{n\sigma_x^2} \right) u_2 \\
&= \left(\bar{y} - \frac{\bar{x}\,\overline{xy}}{\sigma_x^2} + \frac{\bar{x}^2 \bar{y}}{\sigma_x^2} \right) u_1 + \left(\frac{\overline{xy}}{\sigma_x^2} - \frac{\bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x^2} \right) u_2
\end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu,

$$\beta = \frac{1}{\sigma_x^2}(\overline{xy} - \bar{y}\,\bar{x}) = \frac{cov(y, x)}{Var(x)}$$

et

$$\alpha = \bar{y} - \frac{\bar{x}\,\overline{xy}}{\sigma_x^2} + \frac{\bar{x}^2 \bar{y}}{\sigma_x^2} = \bar{y} - \beta \bar{x}$$

Définition La droite d'équation$y = \alpha + \beta x$ s'appelle la droite de régression de y en x.

Remarques

- Cette droite passe par le point moyen de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$.
- On aurait pu calculer la droite de régression de x en y. On aurait obtenu :

$$x = \alpha' + \beta' y$$

avec $\beta' = \dfrac{cov(y, x)}{Var(y)}$. Tracées dans le même repère, ces deux droites seront confondues si et seulement si $\beta = \dfrac{1}{\beta'}$ c'est-à-dire si et seulement si,

$$\frac{cov(x, y)^2}{Var(x)Var(y)} = 1$$

ou encore,

$$|\rho(x, y)| = 1$$

Rappelons que $-1 \leqslant \rho(x, y) \leqslant 1$. On peut aussi montrer que,

$$|\rho(x, y)| = \sqrt{1 - \frac{1}{n\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2}$$

On obtient donc la proposition suivante :

Proposition Les points (x_i, y_i) sont alignés si et seulement si $|\rho(x, y)| = 1$.

6 automorphisme orthogonaux, matrices orthogonales

Dans tout ce paragraphe $(E, < \mid >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n. La norme associée au produit scalaire $< \mid >$ est notée $\| \|$.

Définition 9. on appelle automorphisme orthogonal de E, tout endomorphisme u de E conservant le produit scalaire, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ < x \mid y > = < u(x) \mid u(y) >$$

Remarque : un tel endomorphisme est nécessairement un automorphisme de E, en effet vérifier en exercice que $\text{Ker } u = \{0_E\}$.

Théorème 13. Soit u un endomorphisme de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u conserve la norme, c'est-à-dire,
$$\forall x \in E, \ \|x\| = \|u(x)\|$$
2. u est un automorphisme orthogonal.
3. L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E.
4. Il existe une base orthonormée de E dont l'image par u est une base orthonormée de E.

Démonstration

- 1. $\Rightarrow$ 2. : admis.
- 2. $\Rightarrow$ 3. : si $(v_1, ..., v_n)$ est une base orthonormée alors,
$$< u(v_i) \mid u(v_j) > = < v_i \mid v_j > = \delta_{ij}$$
donc $(u(v_1), ..., u(v_n))$ est une famille orthonormée de E, c'est donc une base de E.

- 3. $\Rightarrow$ 4. : trivial, si c'est vrai pour **toute** base orthonormée, c'est vrai pour **une**.

- 4. $\Rightarrow$ 1. : soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée telle que $\mathcal{B}' = (u(e_1, ..., u(e_n))$ soit une base orthonormée de E, alors tout $x \in E$, s'écrit sous la forme,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

donc

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(e_i)$$

et

$$||u(x)||^2 =< u(x) \mid u(x) >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(e_i) \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(e_i) >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 =< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i >=< x, x >= ||x||^2$$

Définition 10. soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>orthogonale</u> lorsque A est la matrice d'un automorphisme orthogonal de E dans la base canonique de E.

Théorème 14. Soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est une matrice orthogonale.
- $$^tAA = A^tA = I_n$$
- La matrice de A est inversible et ${}^tA = A^{-1}$.
- La matrice de A est une matrice de passage entre deux bases orthonormées de E.
- Les vecteurs colonnes de A définissent une base orthonormée de E.

Exemple : les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$.

Théorème 15. Le déterminant d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est 1 ou -1.

Démonstration en exercice

ATTENTION La réciproque est fausse, il ne suffit pas que le déterminant soit 1 ou -1 pour que la matrice soit orthogonale.

Remarque Les seules valeurs propres possibles pour une matrice orthogonale sont 1 et -1.

Tableau récapitulatif des automorphismes orthogonaux en dimension 2 :

Sp(u)	sous-espaces propres de u	nature de u	det(u)
$\emptyset$	pas de sous-espace propre	u est une rotation d'angle $\theta \neq 0 \bmod \pi$	$+1$
$\{1\}$	$E_1 = E$	$u = Id_E$ ou rotation d'angle $0 \bmod 2\pi$	$+1$
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$	$u = -Id_E$ ou rotation d'angle $\pi \bmod 2\pi$	$+1$
$\{1, -1\}$	E_1 et E_{-1} sont des droites orthogonales de E	u est la symétrie orthogonale par rapport à E_1	-1

Remarque 2. La caractérisation par le déterminant n'est valable que en dimension 2.

7 Endomorphismes symétriques

Dans tout ce paragraphe $(E, < \mid >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Définition 11. Il y a equivalence (admise) entre les 2 définitions suivantes. soit u un endomorphisme de E.

1. $\forall (x, y) \in E^2, \; < u(x) \mid y > = < x \mid u(y) >$
2. On dit que u est <u>symétrique</u> si sa matrice par rapport à une base orthonormée pour $< \mid >$, est symétrique.

ATTENTION Ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie.

Remarque : en fait on peut montrer que si u est un endomorphisme symétrique, alors pour toute base de E orthonormée pour $< \mid >$, la matrice de u par rapport à cette base, est symétrique.

Théorème 16. Soit u un endomorphisme symétrique de E, alors,

1. les racines du polynôme caractéristique sont toutes réelles,
2. les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de u sont orthogonaux,
3. il existe une base orthonormée de vecteurs propres de E.

Corollaire 17. Pour toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il existe une matrice orthogonale P telle que,

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & . \\ 0 & \lambda_2 & \dots & . \\ & & & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où λ_i, pour $i = 1..n$, sont les valeurs propres de A.

Exercices

Exercice 1. Soit $n \geqslant 1$, et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Calculer $tr(A{}^tA)$ en fonction des $a_{i,j}$.
2. Montrer que l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(A, B) = tr(A{}^tB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour toutes matrices A et B symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a,

$$(tr(AB))^2 \leqslant (tr(A^2))(tr(B^2))$$

Exercice 2.

1. Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et p le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par le vecteur $(1, 0, 1)$. Donner la matrice de p relativement à la base canonique.
2. Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et soit p le projecteur orthogonal sur le plan (P) d'équation $x - 2y + z = 0$. Donner une base orthonormée de (P) et écrire la matrice de p relativement à la base canonique.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 1, 0)$$
$$u_2 = (1, 1, 0, -1)$$
$$u_3 = (-2, 0, 1, 1)$$

Soit F=Vect(u_1, u_2, u_3).

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
2. En déduire la dimension de F, puis celle de $F^\perp$.
3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de F.

4. On considère le projecteur orthogonal sur F que l'on notera p. Soit $v = (1,3,0,0)$, calculer $p(v)$.

5. En déduire $d(v, F)$.

6. Soient (v_1, v_2, v_3) une base quelconque de F et (v_0) un vecteur non nul de $F^\perp$, justifier que (v_0, v_1, v_2, v_3) est une base de E et donner la matrice du projecteur p relativement à cette base.

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et soit $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ où $V_1 = (1,0,1)$, $V_2 = (2,1,0)$ et $V_3 = (1,1,1)$. $\mathcal{B}$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$? En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, construire à partir de $\mathcal{B}$ une base orthonormée $\mathcal{B}'$.

Exercice 5.

1. Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$, montrer que,

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

est un produit scalaire sur E.

2. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2[X]$ relativement au produit scalaire ci-dessus.

3. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ et soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4$, calculer la projection orthogonale de P sur F. En déduire,

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^4 - ax^2 - bx - c)^2 dx$$

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f definie sur $E \times E$ par

$$f(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1. Pour quelles valeurs de n, f est-elle un produit scalaire sur E ?

2. Soit $n = 2$. Trouver une base orthonormée de E muni du produit scalaire f.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit f definie sur $E \times E$ par

$$B(P, Q) = P(0)Q(1) + P(1)Q(0)$$

1. f est-elle un produit scalaire sur E ?

2. Donner la matrice de B relativement à la base $(1, X, X^2)$.

Exercice 8. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, < \ | \ >)$. Montrer que Im u=(Ker u)$^\perp$.

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants vérifier que si matrice est celle d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ et préciser sa nature (symétrie, rotation...).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Quelles sont les caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est,

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Diagonaliser en base orthonormée les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Soit E un espace euclidien, montrer que si un automorphisme orthogonal de E est diagonalisable, alors c'est une symétrie.

Exercice 13. Soit E un espace euclidien et f un automorphisme orthogonal de E, tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que de tels endomorphismes existent en donnant un exemple dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont orthogonaux.