Formes quadratiques et applications

Dans tout ce chapitre, n est un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}^n$. On note $\mathbb{M}$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E l'endomorphisme identité de E et 0_E le vecteur nul de E. Si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

1 Définitions

Définition 1. Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est appelée forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur $E \times E$ telle que :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x, x)$$

La forme quadratique q est appelée forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique φ.

Exemple 1. :

- Quelle est la forme quadratique associée à

$$\begin{aligned} \varphi :\ & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 \end{aligned}$$

  (On pourra écrire plus simplement s'il n'y a pas d'ambiguité $q(x_1, x_2)$ à la place de $q((x_1, x_2)))$.
- Quelle est la forme quadratique associée à

$$\begin{aligned} \varphi :\ & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 \end{aligned}$$

Proposition 1. Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur $E \times E$ telle que q soit associée à φ. On l'appelle la forme polaire de q, et elle est définie par :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

Démonstration A faire

Définition 2. La matrice M de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de sa forme polaire. On a alors,

$$q(x) = {}^tXMX$$

où X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1. une forme quadratique q s'exprime comme un polynôme homogène du second degré en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$, c'est-à-dire que c'est une somme de monômes en x_i^2 et $x_i x_j$.

Exemple 2. Déterminer la matrice de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Définition 3. on appelle rang et noyau de la forme quadratique q ceux de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 4. un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ est dit isotrope pour la forme quadratique q si $q(x) = 0$.

Remarque 2. **ATTENTION** : il ne faut pas confondre vecteur isotrope et élément du noyau. Un élément du noyau est toujours isotrope mais un vecteur isotrope n'est pas forcément dans le noyau.

Exemple 3. Donner le rang le noyau et les vecteurs isotrope de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

2 Signature d'une forme quadratique

2.1 Décomposition en carrés

Théorème 1. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe des formes linéaires indépendantes $l_1, l_2, ..., l_r$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et des constantes non nulles $c_1, c_2, ..., c_r \in \mathbb{R}$ où $r \leqslant n$, telles que

$$q = c_1 l_1^2 + ... + c_r l_r^2$$

Pour faire apparaître cette décomposition on utilise l'algorithme de Gauss dont le principe consiste à éliminer progressivement les variables. On distingue deux cas

1. la forme quadratique contient le carré d'une variable, supposons que ce soit par exemple x_1. On peut écrire q sous la forme :

$$q(x_1, x_2, ..., x_n) = cx_1^2 + x_1 l(x_2, ..., x_n) + r(x_2, ..., x_n)$$

où c est une constante, l une forme linéaire et r une forme quadratique. On peut considérer $cx_1^2 + x_1 l(x_2, ..., x_n)$ comme le "début" d'un carré et on peut écrire,

$$cx_1^2 + x_1 l(x_2, ..., x_n) = c(x_1 + \frac{1}{2c} l(x_2, ..., x_n))^2 - \frac{1}{4c} l^2(x_2, ..., x_n)$$

On a alors obtenu le premier terme de la décomposition : $c_1 l_1^2 = c(x_1 + \frac{1}{2c} l)^2$. Il reste à traiter $-\frac{1}{4c^2} l^2(x_2, ..., x_n) + r(x_2, ..., x_n)$ qui est une forme quadratique où l'on a éliminé la variable x_1 et à qui on applique à nouveau l'algorithme.

2. La forme quadratique ne contient aucun carré de variable, elle contient alors au moins un produit x_ix_j. Supposons par exemple qu'elle contienne x_1x_2, alors q peut s'écrire :

$$\begin{aligned} q(x_1,...,x_n) &= cx_1x_2 + x_1l(x_3,...,x_n) + x_2m(x_3,...,x_n) + r(x_3,...,x_n) \\ &= c(x_1 + \frac{1}{c}m(x_3,...,x_n))(x_2 + \frac{1}{c}l(x_3,...,x_n)) \\ & \quad -\frac{1}{c}l(x_3,...,x_n)m(x_3,...,x_n) + r(x_3,...,x_n) \end{aligned}$$

où c est une constante non nulle, l et m des formes linéaires et r une forme quadratique. On utilise alors l'identité remarquable :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

qui peut aussi s'écrire

$$a'b' = \frac{1}{4}((a'+b')^2 - (a'-b')^2)$$

sur le premier terme ci-dessus, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & c(x_1 + \frac{1}{c}m(x_3,...,x_n))(x_2 + \frac{1}{c}l(x_3,...,x_n)) \\ & = \frac{c}{4}(x_1 + \frac{1}{c}m(x_3,...,x_n) + x_2 + \frac{1}{c}l(x_3,...,x_n))^2 \\ & -\frac{c}{4}(x_1 + \frac{1}{c}m(x_3,...,x_n) - x_2 - \frac{1}{c}l(x_3,...,x_n))^2 \end{aligned}$$

On a ainsi fait apparaître les deux premiers termes de la décomposition, et il ne reste plus qu'à traiter $-\frac{1}{c}l(x_3,...,x_n)m(x_3,...,x_n) + r(x_3,...,x_n)$ qui est une forme quadratique où l'on a éliminé les variables x_1 et x_2, et à qui on applique à nouveau l'algorithme.

ATTENTION : l'algorithme de Gauss assure l'indépendance des formes linéaires $l_1, l_2, ..., l_r$. Il ne s'agit pas d'écrire q sous une forme de sommes quelconques de carrés.

Exemples : Appliquer l'algorithme de Gauss aux formes quadratiques suivantes :

1. $q(x_1,x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2$
2. $q(x_1,x_2) = x_1x_2$

Vidéo : Algotrithme de gauss et exemples

2.2 Caractéristiques d'une forme quadratique

Définition 5. soit q une forme quadratique sur E avec $q = c_1l_1^2 + ... + c_rl_r^2$ sa décomposition de Gauss. On note s le nombre de coefficients c_i strictement positifs et t le nombre de coefficients c_i strictement négatifs, alors le couple (s,t) est appelé signature de la forme quadratique q.

Remarque 3. important : la décomposition de Gauss n'est pas unique, mais la signature est indépendante de la décomposition de Gauss obtenue.

Exemple 4. Donner les signatures des formes suivantes

1. $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2$
2. $q(x_1, x_2) = x_1x_2$

Définition 6. une forme quadratique q sur E est dite définie positive (resp. négative) quand, pour tout $x \in E$ non nul, on a $q(x) > 0$ (resp. $q(x) < 0$).

Proposition 2. Une forme quadratique sur E est définie positive ssi sa signature est $(n, 0)$ et elle est définie négative ssi sa signature est $(0, n)$.

Démonstration 1. q est de signature $(n, 0)$ équivaut à :

$$q(x) = c_1l_1^2(x) + ... + c_nl_n^2(x)$$

où les constantes c_i sont toutes strictement positives, donc $q(x) \geqslant 0$. De plus si $q(x) = 0$, alors :

$$\begin{cases} l_1(x) = 0 \\ l_2(x) = 0 \\ . \\ . \\ l_(x) = 0 \end{cases}$$

car une somme de termes positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls. Le système ci-dessus est un système linéaire de rang n car les formes linéaires l_i sont indépendantes. Le système admet donc une solution unique qui est $x = 0_E$. Réciproquement si :

- si la signature est $(r, 0)$ avec $r < n$, alors $q(x) \geqslant 0$ mais le système ci-dessus n'est plus de rang n, il est de rang $r < n$ et donc il admet des solutions non nulles.
- si la signature est (s, t) où $t \neq 0$, alors on peut vérifier que l'on peut trouver des $x \in E$ tels que $q(x) < 0$.

Proposition 3. q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe un produit scalaire $< \ | \ >$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) =< x|x >$.

Démonstration 2.
- si $< \ | \ >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors, $q(x) =< x|x >$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. En effet, soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et soit $x = (x_1, ..., x_n)$, alors

$$\begin{aligned} q(x) &= < \sum_{i=1}^{n} x_ie_i | \sum_{j=1}^{n} x_je_j > \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ix_j < e_i|e_j > \\ &= {}^tXMX \end{aligned}$$

où M est la matrice dont les coefficients m_{ij} vérifient $m_{ij} =< e_i|e_j >$, elle est donc symétrique. De plus q est définie positive car $q(x) = < x|x >> 0$ si $x \neq 0_E$ puisque $< \ | \ >$ est un produit scalaire.

- Réciproquement si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe une matrice symétrique M telle que $q(x) = {}^tXMX$. Posons $< x|y >= {}^tXMY$ et montrons que $< x|y >$ est un produit scalaire.

$$< x|y >= {}^tXMY = {}^tX{}^tMY = {}^t({}^tYMX) = {}^tYMX =< y|x >$$

Il est facile de vérifier la bilinéarité et $< x|x >> 0$ si $x \neq 0_E$ car $< x|x >= q(x)$.

Corollaire 1. Si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ alors $\sqrt{q(x)}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2.3 Changement de base pour les formes quadratiques

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E, $\mathcal{B}'$ une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ on note $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$ et X et X' les vecteurs colonnes correspondants, on a donc $X' = P^{-1}X$.

Proposition 4. Soit q la forme quadratique de matrice M alors

$$q(x) = {}^tX'({}^tPMP)X'$$

Autrement dit la matrice de q dans la base $\mathcal{B}'$ est ${}^tPMP$.

Exemple 5. Démontrer cette propriété.

Rappel Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et du produit scalaire usuel, et soit q une forme quadratique de matrice M dans la base canonique. M est une matrice symétrique donc il existe une matrice orthogonale (donc $P^{-1} = {}^tP$) telle que ${}^tPMP$ est diagonale, autrement dit il existe une base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{B}'$, dont les vecteurs sont les vecteurs colonnes de P et dans laquelle la matrice de q est diagonale.

Proposition 5. Si la signature de la forme quadratique q est (s, t) alors s est le nombre de valeurs propres strictement positives et t le nombre de valeurs propres strictement négatives et le rang de q est $r = s + t$.

Exemple 6. retrouver la signature de $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2$ et $q(x_1, x_2) = x_1x_2$ en déterminant les valeurs propres de la matrice correspondante.

Vidéo : Changement de base et 2eme méthode

3 Application aux extrema locaux de fonctions de plusieurs variables

Dans ce paragraphe $E = \mathbb{R}^p$ est muni de la norme usuelle $||x|| = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{x_i^2}$. On note $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p, ||x - a|| < r\}$ où $r > 0$.

Définition 7. Soit f une application définie de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ et a un point de U.

- On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et tel que $\forall x \in B(a, r),\ f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et tel que $\forall x \in B(a, r),\ f(x) \geqslant f(a)$.

Si f admet un minimum local ou un maximum local en a, on dit que f admet un extremum local en a.

Proposition 6. Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si f admet un extremum local en a alors $\forall i \in [\![1..p]\!]$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Démonstration 3. Soit $a = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$, tel que f admette un extremum local en a. $\forall i \in [\![1..p]\!]$, soit $f_{a,i}$ définie par :

$$f_{a,i} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f_{a,i}(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1} ..., a_p) \end{array}$$

$f_{a,i}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet un extremum local en a_i sa dérivée est donc nulle en a_i, autrement dit $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Définition 8. Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Si toutes les dérivées partielles de f sont nulles en a, on dit que a est un point critique de f.

Remarque 4. La proposition précédente peut donc s'exprimer de la façon suivante :
Pour qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ admette un extremum local en a, il faut que a soit un point critique de f, mais attention ce n'est pas une condition suffisante.

Rappel Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f"(a) + h^2 \varepsilon(h)$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Si on a un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$ et le signe de $f(a + h) - f(a)$ est donné par $f"(a)$. Si $f"(a) > 0$ on a un minimum local en a, si $f"(a) < 0$ on a un maximum local en a et si $f"(a) = 0$ on ne peut rien dire. Nous allons généraliser ce raisonnement aux fonctions de plusieurs variables.

Pour tout $h = (h_1, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$, on pose :

$$Q_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) h_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

Alors Q_a est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$.

Proposition 7. Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un point de $\mathbb{R}^p$. Il existe $r > 0$ tel que tel que $\forall h \in B((0, ..., 0), r)$ on ait :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} Q_a(h) + ||h||^2 \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction continue en $(0, ..., 0)$ et $\varepsilon(0, ..., 0) = 0$.

Proposition 8. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, on suppose que a est un point critique de f, alors :

- Si Q_a est définie positive (signature $(p, 0)$), f admet un minimum local en a.
- Si Q_a est définie négative (signature $(0, p)$), f admet un maximum local en a.
- Si Q_a n'est ni positive ni négative (signature (s, t) avec $s \neq 0$ et $t \neq 0$), alors f n'a ni maximum local ni minimum local en a, on dit alors qu'en a on a un point col (ce cas n'existe pas pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
- Si Q est positive, ou négative mais est dégénérée (signature $(s, 0)$ ou $(0, s)$ avec $s < p$), alors on ne peut rien conclure.

Vidéo : Applications aux extrema

4 Applications à l'étude des coniques

4.1 Coniques et formes quadratiques

Définition 9. soit E le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient six réels a, b, c, d, e, f tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

La courbe $\mathcal{C}$ est appelée une conique.

Théorème 2. Soit $\mathcal{C}$ la conique dont l'équation dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Soit λ, μ les valeurs propres de la matrice ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur propre relatif à la valeur propre λ et $\vec{v}$ est un vecteur propre relatif à la valeur propre μ tels que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée, alors dans le reprère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme,

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + gx' + hy' + f = 0$$

Démonstration : soit $M \in \mathcal{C}$, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$, alors,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow ax^2 + 2bx + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^tX.A.X + (d\ e).X + f = 0 \end{aligned}$$

Soit P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $(\vec{u}, \vec{v})$, alors,

$$A = P.D.{}^tP$$

et donc,

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow {}^t({}^tP.X).D({}^tP.X) + (d\ e).X + f = 0$$

${}^tP.X$ est le vecteur colonne des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Notons $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP.X$, c'est-à-dire $P.X' = X$, et notons $(g\ h) = (d\ e).P$, alors, l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ devient,

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + gx' + hy' + f = 0$$

Nature de la conique : dans un repère orthonormé adapté, l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + gx + hy + f = 0$$

- Si λ ou μ est nul, la courbe s'étudie facilement.
  Exemple : représenter la courbe d'équation $x^2 + 4x - y + 1 = 0$.
- si λ et μ sont non nuls, alors l'équation de $\mathcal{C}$ peut se mettre sous la forme,

  $$\lambda(x + \frac{g}{2\lambda})^2 + \mu(y + \frac{h}{2\mu})^2 + f - \frac{g^2}{4\lambda} - \frac{h^2}{4\mu} = 0$$

  Posons $\beta = f - \dfrac{g^2}{4\lambda} - \dfrac{h^2}{4\mu}$.
  - si λ et μ sont de même signe, alors : si $\beta = 0$, $\mathcal{C}$ se réduit à un point, si β est de même signe que λ et μ, alors $\mathcal{C}$ se réduit à $\emptyset$, et si β est de signe différent alors $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre $(-\dfrac{g}{2\lambda}, -\dfrac{h}{2\mu})$.
    Question : dans quel cas obtient-on un cercle ?
  - si λ et μ sont de signe différents, alors : si $\beta = 0$, $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites sécantes , sinon c'est une hyperbole de centre $(-\dfrac{g}{2\lambda}, -\dfrac{h}{2\mu})$.

On en déduit le théorème :

Théorème On considère le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ la conique d'équation,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans ce repère. On note A la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont notées λ et μ. On note q la forme quadratique définie par : $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

- Si $det(A) = \lambda\mu > 0$ (c'est-à-dire si la signature de q est $(2, 0)$ ou $(0, 2)$) alors $\mathcal{C}$ est une ellipse ou un singleton ou l'ensemble vide.
- Si $det(A) = \lambda\mu < 0$ (c'est-à-dire si la signature de q est $(1, 1)$) alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.
- Si $det(A) = \lambda\mu = 0$ (c'est-à-dire si la signature de q est $(1, 0)$ ou (0,1)) alors $\mathcal{C}$ est une parabole, ou la réunion de deux droites parallèles, ou une droite, ou l'ensemble vide.

Vidéo : Applications à l'étude des coniques

4.2 Propriétés géométriques des coniques

Définition : soit D une droite du plan P, $F \notin D$ un point du plan et $e \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'ensemble des points :

$$C = \{M \in P,\ MF = eMH_M\}$$

où H_M désigne la projection orthogonale de M sur D. D est appelée directrice de C et F est appelé foyer et e est appelé excentricité de C.

Théorème

- Si $0 < e < 1$ alors C est une ellipse
- Si $e = 1$ alors C est une parabole
- Si $e > 1$ alors C est une hyperbole

Démonstration On choisit comme repère du plan, le repère défini par :

— D est l'axe des ordonnées

— l'axe des abscisses est la droite perpendiculaires à D passant par F.

Alors les coordonnées de F sont de la forme $(\alpha, 0)$ avec $\alpha \neq 0$ car $F \notin D$. Soit M un point de coordonnées (x, y), alors $MF^2 = y^2 + (x-\alpha)^2$ et $MH_M = |x|$ c'est-à-dire $MH_M^2 = x^2$.
Donc

$$MF = eMH_M \Leftrightarrow MF^2 = e^2MH_M^2 \Leftrightarrow (1-e^2)x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0 \tag{1}$$

1. Si $e = 1$, d'après (3),
$$MF = eMH_M \Leftrightarrow x - \frac{\alpha}{2} = \frac{y^2}{2\alpha}$$
On reconnait la parabole de sommet $(\frac{\alpha}{2}, 0)$.

2. Si $e \neq 1$, alors on pourra vérifier (en exercice) que d'après (3) :
$$MF = eMH_M$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{\alpha}{1-e^2}\right)^2}{\frac{\alpha^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\alpha^2 e^2}{1-e^2}} = 1 \tag{2}$$
   - Si $0 < e < 1$ alors $1 - e^2 > 0$ et l'équation (4) est l'équation d'une ellipse de centre $(\frac{\alpha}{1-e^2}, 0)$.
   Exemple : tracer la courbe correspondant à $\alpha = 1$ et $e = \frac{1}{2}$.
   - Si $e > 1$, alors l'équation (4) est l'équation d'une hyperbole.
   Exemple : tracer la courbe correspondant à $\alpha = 1$ et $e = 2$.

Remarque : Dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole ($e \neq 1$), pour e fixé, la donnée de F et D détermine la conique, mais pour une ellipse ou une hyperbole donnée, il existe un autre coupe (F', D') qui donne la même conique.

Proposition : Calcul de e et des foyers à partir de l'équation réduite

1. Cas de l'ellipse.
   Supposons que dans un repère adapté, l'ellipse ait pour équation réduite :
   $$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$
   où $0<b<a$, alors
   $$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$
   et les foyers F et F' ont pour coordonnées : $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ et $(\sqrt{a^2-b^2},0)$.

   Remarque : on peut montrer que l'ellipse est l'ensemble des points M tels que :
   $$FM+F'M=2a$$
2. Cas de l'hyperbole.
   Supposons que dans un repère adapté, l'hyperbole ait pour équation réduite :
   $$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$
   où $a,b>0$, alors
   $$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$
   et les foyers F et F' ont pour coordonnées : $(-\sqrt{a^2+b^2},0)$ et $(\sqrt{a^2+b^2},0)$.

   Remarque : on peut montrer que l'hyperbole est l'ensemble des points M tels que :
   $$|FM-F'M|=2a$$

   .

4.3 Equations paramétriques des coniques

Proposition

1. L'ellipse d'équation réduite
   $$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$
   admet comme représentation paramétrique :
   $$\left\{\begin{array}{l} X=a\cos t \\ Y=b\sin t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$
2. L'hyperbole d'équation réduite
   $$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$
   admet comme représentation paramétrique :
   $$\left\{\begin{array}{l} X=\pm a\mathrm{ch}t \\ Y=b\mathrm{sh}t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

Exercices

Exercice 1.

1. Soit la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x, y, z) = x^2$. Déterminer la matrice associée à q. Déterminer le noyau et l'ensemble des vecteurs isotropes. Sont-ils des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?
2. Même question avec $q(x, y, z) = x^2 - z^2$.

Exercice 2.
Déterminer par deux méthodes différentes le rang et la signature de la forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ définie par : $q(x, y) = x^2 + 8xy - 5y^2$.

Exercice 3.
Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, et Q la forme quadratique,

$$Q(X) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4zy$$

où $X = (x, y, z)$.

1. Trouver trois formes linéaires l_1, l_2, l_3 telles que

$$Q(X) = l_1^2(X) + l_2^2(X) + l_3^2(X)$$

2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ telle que la matrice de Q par rapport à cette base soit la matrice identité.

Exercice 4.
Déterminer la signature et le rang des formes quadratiques suivantes,

$$q_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy$$

$$q_2(x, y, z) = 2xy - 2yz$$

$$q_3(x, y, z) = x^2 + y^2 - xy - yz - xz + z^2$$

Exercice 5.
Trouver $a \in \mathbb{R}$ pour que la forme quadratique Q de $\mathbb{R}^3$ définie par,

$$Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 - xy - yz$$

soit définie positive.

Exercice 6.
Etudier les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$
2. $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$

Exercice 7.
Etudier les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5$
2. $f(x, y, z) = z^2(1 + xy) + xy$

Exercice 8.
Montrer que la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 9.
Soit $\mathcal{C}$, la courbe d'équation :

$$2,9x^2 - 0,6xy + 2,1y^2 + 3\sqrt{10}x + 3\sqrt{10}y + 15 = 0 \tag{3}$$

Après en avoir donner la nature et les éléments caractéristiques , représenter $\mathcal{C}$

Exercice 10.
Soit $\mathcal{C}$, la courbe d'équation :

$$x^2 - 2xy + y^2 - 7\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2 = 0 \tag{4}$$

Après en avoir donner la nature et les éléments caractéristiques , représenter $\mathcal{C}$