Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on note 0_E le vecteur nul de E.

1 Normes et distances

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$.
2. $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
3. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
4. $\forall (x, y) \in E \times E,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Rappel : Si φ est un produit scalaire sur E, alors l'application $\mathcal{N}$ de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall x \in E,\ \mathcal{N}(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$ est une norme de E, c'est la norme associée au produit scalaire φ.

Remarque 1. une norme est souvent notée $|| \ ||$.

Définition 2.

1. Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.
2. Un vecteur de norme 1 est dit unitaire.

1.2 Quelques exemples de normes

1. Si $E = \mathbb{R}^n$.

   (a) La norme euclidienne notée $|| \ ||_2$ est la norme associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$:

   $$\text{soit } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

   (b) $|| \ ||_1$ définie par :

   $$\text{soit } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

   est aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(c) $\| \|_\infty$ définie par :

$$\text{soit } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

est aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2. : si $n = 1$ ces 3 normes coïncident avec $| \ |$.

2. Si $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) $\| \|_1$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \ \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

   est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

   (b) $\| \|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \ \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$$

   est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Rappel : une fonction continue sur $[a, b]$ est bornée.

3. Si $E = \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (matrices m lignes et n colonnes).
   Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$, on peut définir des normes de la façon suivante :

   (a) $\text{norm1}(A) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$

   (b) $\text{norm2}(A) = \displaystyle\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right)$

   (c) $\text{norm3}(A) = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$

1.3 Distance

Définition 3. Soit G un ensemble non vide, on appelle distance sur G une application d de $G \times G$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall (x, y) \in G \times G, \ d(x, y) \geqslant 0$
2. $\forall (x, y) \in G \times G, \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\forall (x, y) \in G \times G, \ d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G, \ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Théorème 1. Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. L'application

$$d: \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

est une distance sur E, elle est appelée distance associée à la norme $\| \|$.

Remarque 3. on peut définir une distance sur un ensemble qui n'a pas de structure d'espace vectoriel, contrairement à la notion de norme.

2 Boules d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et d sa distance associée.

Définition 4. Soit $x_0 \in E$ et r un réel strictement positif.

1. On appelle <u>boule ouverte</u> de centre x_0 et de rayon r l'ensemble noté $B(x_0, r)$:

$$B(x_0, r) = \{y \in E,\ \|x_0 - y\| < r\} = \{y \in E,\ d(x_0, y) < r\}$$

2. On appelle <u>boule fermée</u> de centre x_0 et de rayon r l'ensemble noté $\overline{B}(x_0, r)$:

$$\overline{B}(x_0, r) = \{y \in E,\ \|x_0 - y\| \leqslant r\} = \{y \in E,\ d(x_0, y) \leqslant r\}$$

Exemple 1.

1. Si $E = \mathbb{R}$ est muni de la norme $| \ |$, $B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$ et $\overline{B}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$.
2. Si $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne, $\overline{B}(x_0, r)$ est le disque de centre x_0 et de rayon r.

Définition 5. Une partie A de E est dite <u>bornée</u> si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in A,\ \|x\| \leqslant K$$

Exemple 2.

1. Toute boule de E est bornée.
2. Tout sous-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ n'est pas borné.

3 Suites convergentes, normes équivalentes

Définition 6. Une suite (x_p) d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ est dite <u>convergente</u> dans $(E, \| \|)$ si $\exists x \in E$ tel que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x_p - x\| = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ (p \geqslant N) \Rightarrow (\|x_p - x\| < \varepsilon)$$

Théorème 2. Soit (x_p) une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ qui converge, alors l'élément $x \in E$ tel que $\lim_{p\to+\infty} \|x_p - x\| = 0$ est unique. Il est appelé limite de la suite (x_p) et on note :

$$x = \lim_{p\to+\infty} x_p$$

Remarque 4.
1. une suite de fonctions (f_n) qui converge dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est dite uniformément convergente sur $[a,b]$. En effet, rappel : une suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \sup_{[a,b]} |f_n - f| < \varepsilon$$
2. Une série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[a,b]$ si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Proposition 3. Propriétés des suites convergentes

1. Soient (x_p) et (y_p) deux suites d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ qui convergent, alors
$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{p\to+\infty} (\alpha x_p + \beta y_p) = \alpha \lim_{p\to+\infty} x_p + \beta \lim_{p\to+\infty} y_p$$
2. Si (x_p) est une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ qui converge vers x alors toute suite extraite de (x_p) converge aussi vers x.
3. Toute suite (x_p) d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ qui converge est bornée.

Définition 7. Une suite (x_p) de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ qui ne converge pas est dite divergente, ce qui peut se traduire par :

$$\forall x \in E,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \geqslant N \text{ et } \|x_p - x\| > \varepsilon$$

Définition 8. Soient N_1 et N_2 deux normes, on dira que N_1 est équivalente à N_2 s'il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que,

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Remarque 5. si la propriété ci-dessus est vérifiée, on a aussi,

$$\forall x \in E,\ \frac{1}{\beta} N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} N_2(x)$$

Donc si N_1 est équivalente à N_2 alors N_2 est équivalente à N_1, c'est pourquoi on dit plus simplement que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exemple 3. si $E = \mathbb{R}^2$, soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$. Montrer que $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 4. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. N_1 et N_2 sont équivalentes.
2. Soit (x_p) une suite quelconque d'éléments de E, alors (x_p) converge vers x relativement à la norme N_1 si et seulement si (x_p) converge vers x relativement à la norme N_2.

Théorème 5. Toutes les normes d'un espaces vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

ATTENTION : le théorème précédent n'est valable que dans un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 4. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, on peut définir deux normes sur E de la façon suivante : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

$$||P||_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

et

$$||P||_\infty = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$$

On peut facilement montrer que

$$||P||_\infty \leqslant ||P||_1$$

mais $||\ ||_1$ et $||\ ||_\infty$ ne sont pas équivalentes. En effet considérons la suite de polynômes $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ alors $||P_n||_1 = n+1$ et $||P_n||_\infty = 1$ donc il n'existe pas de constante $\alpha > 0$ (indépendante de P_n) telle que $||P_n||_1 \leqslant \alpha ||P_n||_\infty$.

Remarque 6. dans un espace de dimension finie, on pourra dire qu'une suite (x_p) converge vers x, sans préciser par rapport à quelle norme, puisque la limite de cette suite ne dépend pas de la norme utilisée.

Exemple 5. convergence dans $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes. Une suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si chaque suite coordonnée est convergente.
Par exemple dans $\mathbb{R}^2$: la suite $((x_p, y_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (x, y) si et seulement si la suite (x_p) converge vers x et la suite (y_p) converge vers y.
En effet :

$$\lim_{p\to+\infty} ||(x_p - y_p) - (x, y)||_\infty = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{p\to+\infty} \max(|x_p - x|, |y_p - y|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{p\to+\infty} |x_p - x| = 0 \text{ et }, \lim_{p\to+\infty} |y_p - y| = 0$$

4 Ensembles ouverts, ensembles fermés

Dans tout ce paragraphe $(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé et d sa distance associée.

Définition 9. Soient A une partie de E et $x \in A$, on dit que x est un point intérieur à A s'il existe une boule ouverte de centre x incluse dans A, c'est-à-dire si :

$$\exists r > 0,\ B(x, r) \subset A$$

Exemple 6. $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, alors $(1, 1)$ est un point intérieur à A car par exemple $B((1, 1), \frac{1}{2}) \subset A$. Par contre $(1, 0)$ n'est pas un point intérieur à A car $\forall r > 0$, $(1, -\frac{r}{2}) \in B((1, 0), r)$ mais $(1, -\frac{r}{2}) \notin A$ donc $\forall r > 0$, $B((1, 0), r)$ n'est pas inclus dans A.

Définition 10. Une partie A de E est un ouvert de E si pour tout point de A, il existe une boule ouverte de centre x incluse dans A, autrement dit A est un ouvert de E, si tout point de A est intérieur à A ou encore,

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A$$

Exemple 7. Soit $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue comme norme et $A = [0, 1[$. Alors A n'est pas un ouvert de E car 0 n'est pas intérieur à A. En effet $\forall r > 0$, $]-r, r[$ n'est pas inclus dans A. Par contre $C =]0, 1[$ est un ouvert de E car $\forall x \in]0, 1[$, soit $r = \min(\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2})$, alors

$$x - r \geqslant x - \frac{x}{2} > 0$$

et

$$x + r \leqslant x + \frac{1-x}{2} = \frac{x+1}{2} < 1$$

donc $B(x, r) =]x - r, x + r[\subset C$.

Proposition 6.
1. E et $\emptyset$ sont des ouverts de $(E, \|\ \|)$.
2. Toute boule ouverte de E est un ouvert de E.

Théorème 7. L'intersection de deux ouverts de E est un ouvert de E.

Démonstration Soient A_1 et A_2 deux ouverts de E.

1. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ alors $A_1 \cap A_2$ est un ouvert de E.
2. Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ alors $\exists x \in A_1 \cap A_2$. A_1 est un ouvert donc $\exists r_1 > 0,\ B(x, r_1) \subset A_1$ et A_2 est un ouvert donc $\exists r_2 > 0,\ B(x, r_2) \subset A_2$. Soit $r = \min(r_1, r_2)$ alors,

$$B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset A_1$$

et

$$B(x, r) \subset B(x, r_2) \subset A_2$$

donc

$$B(x, r) \subset A_1 \cap A_2$$

Remarque 7. par récurrence, on peut montrer qu'une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E, mais attention une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert. Par exemple soit $A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$ et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ n'est pas un ouvert.

Théorème 8. Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.

Définition 11. Soit A une partie de E, on dit que A est un <u>fermé</u> de E si son complémentaire dans E est un ouvert de E.

Exemple 8. Soit $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue comme norme. $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ est le complémentaire de $]0, 1[= B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc c'est un fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque 8.
1. E est le complémentaire de $\emptyset$ qui est un ouvert donc c'est un fermé, donc E est à la fois ouvert et fermé. De même $\emptyset$ est le complémentaire de E donc c'est un fermé, donc $\emptyset$ est à la fois ouvert et fermé. Ce sont les deux seules parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées.
2. Une partie de E peut n'être ni ouverte ni fermée, par exemple $]0, 1]$ n'est ni un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}$.

Théorème 9. La réunion de deux fermés de E est un fermé de E.

Démonstration Soient F_1 et F_2 deux fermés de E, alors $\complement(F_1 \cup F_2) = \complement F_1 \cap \complement F_2$. $\complement F_1$ et $\complement F_2$ sont des ouverts donc $\complement F_1 \cap \complement F_2$ est un ouvert et donc $F_1 \cup F_2$ est un fermé.

Remarque 9. par récurrence, on peut montrer qu'une réunion finie de fermés de E est un fermé de E, mais attention une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé. Par exemple $\forall n \in \mathbb{N}^*$ soit $F_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n =]0, 1[$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ n'est pas un fermé.

Proposition 10. Une partie A de E est un fermé si et seulement si pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E, la limite de cette suite est dans A.

Remarque 10. en pratique c'est souvent cette proposition qui est utilisée pour montrer qu'un ensemble est fermé ou non.

Exemple 9. $[0, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car, soit (x_n) une suite de $[0, 1]$ qui converge vers x. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} x_n \leqslant 1$ et donc $x \in [0, 1]$.

Proposition 11. Toute boule fermée de E est un fermé de E.

Définition 12. Soit A une partie de E, on dira que le point $x \in E$ est <u>adhérent</u> à A s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Remarque 11. tous les points de A sont adhérents à A. En effet soit $x \in A$, la suite constante égale à x est une suite de points de A qui converge vers x. Par contre pour certaines parties A, on peut trouver des points adhérents à A qui ne sont pas dans A. Exemple : dans $\mathbb{R}$, 1 est adhérent à $[0, 1[$. En effet la suite (x_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 1 - \frac{1}{n}$ est une suite de points de A qui converge vers 1.

Théorème 12. Une partie A de E est un fermé si et seulement si tout point adhérent à A est élément de A.

Démonstration

- Supposons que A est un fermé. Soit x un point adhérent à A, alors il existe une suite de points de A qui converge vers x. Mais on sait que toute suite de points de A qui converge à sa limite dans A, donc $x \in A$. On a montré que tout point adhérent à A est élément de A.

- Réciproquement supposons que tout point de A est adhérent à A. Soit (x_n) une suite de points de A qui converge dans E vers un élément x, alors x est adhérent à A donc $x \in A$.

Définition 13. On appelle <u>bord</u> de A les points adhérents à A qui ne sont pas des points intérieurs à A. Le bord de A peut être noté ∂A.

Exemple 10. dans $\mathbb{R}$ le bord de l'intervalle $]0,1[$ est $\{0,1\}$. C'est aussi le bord de l'intervalle $[0,1]$ ou de l'intervalle $]0,1]$ et $[0,1[$.

Définition 14. Une partie A d'un espace vectoriel E est un <u>compact</u> si et seulement si de toutes suites de points de A on peut extraire une sous-suite convergente dans A.

Exemple 11. Les parties finies de E sont compactes.

Théorème 13. (Bolzano-Weierstrass) On suppose que E est de dimension finie, alors A est une partie compacte de E si et seulement si A est fermée et bornée.

ATTENTION ceci n'est plus vrai si E est de dimension infinie.

Exemple 12. les boules fermées d'un espace de dimension finie E sont des compacts de E.

5 Continuité

5.1 Définition, propriétés

Définition 15. On considère une application f définie sur $A \subset E$ un espace vectoriel muni de la norme $\| \|_E$ dans un espace vectoriel F muni de la norme $\| \|_F$. On dit que <u>f admet pour limite b en a</u> si pour toute suite de points (x_n) convergeant vers a dans $(E, \| \|_E)$, la suite $(f(x_n))$ converge dans $(F, \| \|_F)$ vers b. On notera alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Définition 16. On dit que f est <u>continue en un point $a \in A$</u> si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire si pour toute suite (x_n) de points de A qui converge vers a dans $(E, \| \|_E)$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$ dans $(F, \| \|_F)$.

Définition 17. On dit que <u>f est continue sur une partie A</u> de E si f est continue en tout point de A.

Notations L'ensemble des fonctions continues sur A est notée $\mathcal{C}(A,F)$ ou $\mathcal{C}^0(A,F)$. Lorsque $F=\mathbb{R}$ on note aussi $\mathcal{C}(A)$.

Propriétés

- $\mathcal{C}(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de A dans F muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire.
- Si u est une application continue de A dans $\mathbb{R}$ et f est une application continue de A dans F, alors la fonction uf est une application continue de A dans F.
- Si $E=\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}^p$ alors $f : A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ est continue si et seulement si les applications composantes $f_i : A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sont continues. Il suffit donc de savoir étudier la continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ pour savoir étudier la continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
- Si $F=\mathbb{R}$ et si f est une applications continue sur A qui ne s'annule en aucun point de A, alors $\dfrac{1}{f}$ est une application continue sur A.
- Soit B une partie de F et $(G,\|\ \|_G)$ un espace vectoriel normé. Si f est continue de A dans F et g est continue F dans G et si $f(A)\subset B$, alors $g\circ f$ est continue de A dans G.

Exemple 13.

- Toute fonction polynômiale de n variables est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.
  Par exemple, la fonction f définie par :
  $$\begin{aligned} f:\ &\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ &(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)=3x_1^4x_2+x_1^2+2x_1x_2^4-x_1x_2\end{aligned}$$
  est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Toute fonction rationnelle f de n variables est continue sur son ensemble de définition.
  Par exemple, la fonction f définie par :
  $$\begin{aligned} f:\ &(\mathbb{R}^*)^2\to\mathbb{R}\\ &(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)=\frac{3x_1^4x_2+x_1^2+2x_1x_2^4-x_1x_2}{x_1x_2}\end{aligned}$$
  est continue sur $(\mathbb{R}^*)^2$.
- Supposons que E et F soient deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et soit φ une application de linéaire de E dans F, alors :
  1. $\exists K\in\mathbb{R},\ \forall x\in E,\ \|\varphi(x)\|_F\leqslant K\|x\|_E$
  2. φ est continue de E dans F.

Proposition Soit une application :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Soit $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on considère les applications partielles g_i :

$$g_i: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a_1, a_2, ., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_n) \end{array}$$

Si f est continue sur $\mathbb{R}^n$ alors les applications g_i sont continues sur $\mathbb{R}$.

Attention : la réciproque est fausse ! La continuité des applications partielles n'implique pas la continuité de la fonction f.

Exemple 14.

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

f n'est pas continue en $(0, 0)$ car f n'a pas de limite en $(0, 0)$, mais les applications $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ car elles sont identiquement nulles.

5.2 Fonction continue sur un compact

Théorème 14. Si f est continue sur A et si K est un compact de $(E, || \ ||_E)$ inclus dans A, alors $f(K)$ est un compact de $(F, || \ ||_F)$.

Corollaire 15. Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on obtient le résultat suivant : soit A une partie compacte non vide de $(E, || \ ||_E)$ et f une application continue de A dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

Démonstration du corollaire : d'après le théorème précédent, $f(A)$ est un compact c'est-à-dire un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc f est bornée. Le fait que ses bornes soient atteintes provient du fait que $f(A)$ est un fermé.

Remarque 12. le max et le min de f sur A peuvent être atteints soit en un point intérieur à A et dans ce cas c'est aussi un extremum local, soit sur le bord de A. Pour déterminer le max et le min de f il faudra donc étudier les extrema locaux qui se trouvent à l'intérieur de A et faire une étude des variations de f sur le bord de A.

6 Exercices

Exercice 1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$||(x, y)||_1 = |x| + |y|$$

$$||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$||(x,y)||_\infty = \max(|x|,|y|)$$

On rappelle que ce sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

1. Représenter les boules correspondantes $B_1((0,0),1)$, $B_2((0,0),1)$, $B_\infty((0,0),1)$.

2. Montrer que
$$||(x,y)||_\infty \leqslant ||(x,y)||_2 \leqslant ||(x,y)||_1 \leqslant 2||(x,y)||_\infty$$

3. Généraliser ces inégalités dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel et $|| \ ||_1$ et $|| \ ||_2$ deux normes sur E telles que :

$$|| \ ||_1 \leqslant || \ ||_2$$

Montrer que $\forall x \in E,\ \forall r > 0,\ B_2(x,r) \subset B_1(x,r)$.

Exercice 3. Soit f_n les fonctions de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définies par :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -nx+1 \ \forall x \in [0,\frac{1}{n}] \\ &= 0 \ \forall x \in]\frac{1}{n},1] \end{aligned}$$

Montrer que (f_n) converge vers la fonction identiquement nulle pour la norme $|| \ ||_1$, mais pas pour la norme $|| \ ||_\infty$.
Rappel :

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$||f||_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$$

Exercice 4. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$$

Montrer que (f_n) converge vers une fonction que l'on précisera pour la norme $|| \ ||_\infty$ et pour la norme $|| \ ||_1$.

Exercice 5. Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'application norme, N, est convexe, c.a.d. :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall t \in [0,1],\ N(tx+(1-t)y) \leqslant tN(x)+(1-t)N(y)$$

Exercice 6. Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe $a \in F$ et $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset F$. Montrer que $F = E$.

Exercice 7. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est un fermé de E.

Exercice 8.

1. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes, préciser si elles sont ouvertes, fermées ou bien ni ouvertes ni fermées : $[0,1]$, $]0,1[$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,+\infty[$, $\{0\}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2. Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et préciser pour chacune d'elles si elle est ouverte, fermée, ou bien ni ouverte ni fermée.

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x| \neq 2 \text{ ou } |y| \neq 1\}$

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geqslant 0 \text{ et } y = 0\}$

   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y \geqslant 0 \text{ et } x > 0\}$

Exercice 9. Montrer que $\mathbf{Q}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni ouverte ni fermée.

Exercice 10.

1. Soit $I =]0,1[$. I est-elle une partie compacte de $\mathbb{R}$? Donner un exemple de suite n'admettant aucune sous-suite convergente dans I.

2. Soit $J = [0,+\infty[$. J est-elle une partie compacte de $\mathbb{R}$? Donner un exemple de suite n'admettant aucune sous-suite convergente dans J.

Exercice 11. Les ensembles suivants sont-ils des ensembles bornés de $\mathbb{R}^2$:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4 + y^2 \leqslant 1\}$

2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4 + y^2 \geqslant 1\}$

3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4 - y^2 \leqslant 1\}$

4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4 - y^2 \geqslant 1\}$

Exercice 12. Montrer que les parties suivantes sont des compacts de $\mathbb{R}^2$:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + xy \leqslant 1\}$

2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1-x)\}$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$

1. Etudier les extrema locaux de f.

2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f atteint son maximum M et son minimum m sur D.

3. Soit $(x,y) \in D$. Démontrer que si $f(x,y) = M$ ou si $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.

4. Etudier la fonction $t \to f(\cos t, \sin t)$. En déduire m et M.

Exercice 14. Dans cet exercice, le produit scalaire utilisé est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$ et la norme est la norme euclidienne associée.
Soit $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant -2x + 2\}$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et représenter $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit f définie par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$
Déterminer les points critiques de f et vérifier qu'aucun n'appartient à $\mathcal{C}$.

3. Montrer que f atteint son minimum m_1 sur $\mathcal{C}$.

4. Calculer m_1. En déduire $\min\limits_{\mathcal{C}} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

5. Soit A un compact de $\mathbb{R}^2$ et M un point de $\mathbb{R}^2$, on appelle distance de M à A le nombre défini par :
$$d(M, A) = \min_{P \in A} \|\overrightarrow{MP}\|$$
Soit M le point de coordonnées $(1, 1)$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer $d(M, \mathcal{C})$.

Exercice 15. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant 0, y \leqslant 0, x + y \geqslant -3\}$ et f la fonction définie sur D par $\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

1. Représenter D.

2. Montrer que f atteint son max M et son min m sur D.

3. Déterminer m et M.

Exercice 16.

1. Soit φ_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
Montrer que le plus petit $K > 0$ tel que :
$$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ \|\varphi_1(u)\|_\infty \leqslant K\|u\|_\infty$$
est $K = 8$.

2. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, de matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que :
$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \|\varphi(u)\|_\infty \leqslant \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|u\|_\infty$$
En déduire que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est continu.

3. Montrer que si φ admet λ comme valeur propre, alors :

$$|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Remarque $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = norm3(A)$