

MÉCANIQUE DES SOLIDES

Travaux Pratiques



London 2012 - Orbit



École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Bourges
Filière MRI - 1A

Table des matières

Table des matières	3
Liste des figures	4
Liste des tableaux	6
1 Étude des déformations d'un cylindre soumis à une pression interne	9
1.1 Objectif	10
1.2 Préambule	10
1.3 Cylindre sous pression : dispositif expérimental	11
1.4 État de contrainte dans un cylindre sous pression	11
1.4.1 Cas A : cylindre ouvert	13
1.4.2 Cas B : cylindre fermé	14
1.5 Expérimentation	14
2 Comportement élastique des poutres en flexion	17
2.1 Objectif	18
2.2 Dispositif expérimental	18
2.3 Éléments de théorie des poutres : approche de Bernoulli	19
2.3.1 Géométrie d'une poutre	19
2.3.2 Actions mécaniques et torseurs associés	20
2.3.3 Liaisons cinématiques et torseurs associés	20
2.3.4 Efforts intérieurs pour une poutre	20
2.3.5 Équations d'équilibre d'une poutre	21
2.3.6 Contraintes dans une section droite	21
2.3.7 Déformations et déplacements	21
2.4 Expérimentation	22
2.4.1 Poutre en flexion console	22
2.4.2 Poutre en flexion 3 points	23
3 Étude d'un treillis plan	29
3.1 Objectif	30
3.2 Dispositif expérimental	31

3.3	Éléments sur la résolution des treillis de barres	32
3.4	Expérimentation	33
4	Flambement des structures élancées	39
4.1	Objectif	40
4.2	Dispositif expérimental	40
4.3	Éléments de l'approche théorique d'Euler	42
4.4	Expérimentation	45
A	Sytèmes d'unités cohérents	47
B	Propriétés mécaniques de matériaux usuels	49
C	RdM - Sections usuelles	51
D	Capteurs à jauges extensométriques	53
E	Strain Transformation and Rosette Gage Theory	55

Liste des figures

1.1	Wagon citerne ruiné par dépression interne	9
1.2	Principe d'un essai de traction	10
1.3	Banc d'essai pour le cylindre sous pression	12
1.4	Calcul de $\sigma_{\theta\theta}$	13
1.5	Calcul de σ_{zz}	14
1.6	Cylindre sous pression : cas A	15
1.7	Cylindre sous pression : cas B	16
2.1	Poutre de soutien d'un tablier de pont	17
2.2	Banc d'essai pour la flexion des poutres	18
2.3	Éléments de géométrie d'une poutre	19
2.4	Quelques liaisons cinématiques usuelles	25
2.5	Poutre soumise à des actions extérieures	26
2.6	Mise en évidence des efforts intérieurs	26
2.7	Contrainte normale à la section droite	27
2.8	Diagramme des efforts intérieurs d'une poutre en flexion console . . .	27
2.9	Diagramme des efforts intérieurs d'une poutre en flexion 3 points . . .	28
3.1	Exemple d'utilisation des structures de type treillis	29
3.2	Banc expérimental pour l'analyse de treillis plan (photo)	30
3.3	Banc expérimental pour l'analyse de treillis plans (schéma)	31
3.4	Disque de jonction (schéma de principe)	32
3.5	Équilibre des nœuds d'un treillis - projection	33
3.6	Validation du dynamomètre	34
3.7	Caractérisation du matériau	35
3.8	Validation de la mesure des déformations	36
3.10	Second dispositif étudié	36
3.9	Premier dispositif étudié	37
4.1	Flambement de rails sous l'effet de la dilatation thermique	39
4.2	Banc expérimental pour le flambement des poutres (photo)	41
4.3	Banc expérimental pour le flambement des poutres (schéma)	42
4.4	Flambage d'une poutre en appui simple et appui glissant	43

4.5 Influence des conditions limites 44

Liste des tableaux

A.1	Systèmes d'unités cohérents	48
B.1	Propriétés mécaniques de matériaux usuels	50

Sujet n° 1

Étude des déformations d'un cylindre soumis à une pression interne



Figure 1.1 – Wagon citerne ruiné par dépression interne

1.1 Objectif

Les cylindres à paroi mince sous pression ont une large utilisation dans différentes applications industrielles telles que les fuselages des fusées et les réservoirs de stockage des liquides. La connaissance des déformations dans les parois minces et des contraintes générées est une condition essentielle pour le dimensionnement de ces structures.

L'objectif de ce TP est de mesurer les déformations par l'utilisation de jauges de déformation lorsque le cylindre est soumis à une pression à l'intérieur et de les comparer aux résultats de calculs théoriques.

1.2 Préambule

Dans un premier temps, vous allez vous familiariser avec l'utilisation des jauges de déformation. Pour cela, vous disposez d'une éprouvette rectangulaire faite dans un aluminium quelconque que vous devez caractériser. À l'aide de la machine de traction EM550, vous devez donc évaluer expérimentalement le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν de ce matériau.

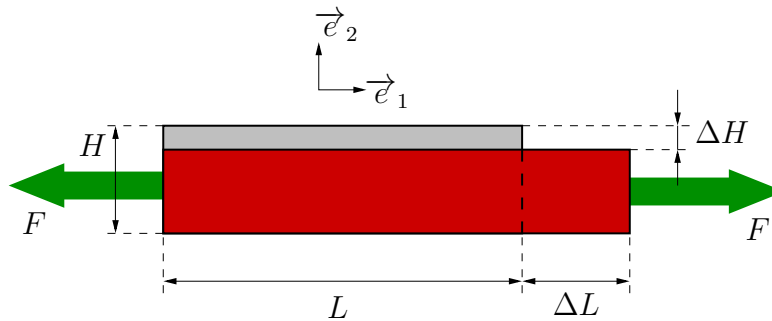


Figure 1.2 – Principe d'un essai de traction

Dans un essai de traction simple comme celui-ci (figure 1.2), l'état de contrainte généré dans l'éprouvette est modélisé par le tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (1.1)$$

avec $\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$ et $S = H \times e$ la surface de la section de l'éprouvette .

Les mesures expérimentales montrent, si l'on reste dans le domaine élastique, que le comportement de notre matériau est linéaire. Nous allons donc le modéliser par la loi

de Hooke qui relie les contraintes aux déformations par la formule :

$$\begin{cases} [\sigma] = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon] + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{Tr}([\varepsilon])[\text{Id}] \\ [\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}\text{Tr}([\sigma])[Id] \end{cases} \quad (1.2)$$

Considérant que la contrainte maximale à ne pas dépasser est aux alentours de ?? Mpa et que l'on souhaite se donner une marge de sécurité, calculez la force maximale à ne pas dépasser lors de l'essai de traction.

En écrivant le tenseur des déformations générées dans l'éprouvette, identifiez les deux graphiques à tracer pour accéder à E et ν .

Avec l'aide de l'enseignant, effectuez les mesures expérimentales.

A l'aide d'un tableur, analysez les mesures expérimentales. Concluez sur le matériau.

1.3 Cylindre sous pression : dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (figure 1.3) est constitué d'un cylindre équipé de jauges de déformations et à l'intérieur duquel nous pouvons exercer une pression variable. Pour cela, nous disposons d'une pompe hydraulique et d'un capteur de pression.

Le cylindrique est placé à l'intérieur d'un bâti rigide qui permet de tester deux configurations différentes pour les extrémités du cylindre (cylindre ouvert ou fermé).

Les dimensions du cylindre sont :

- diamètre intérieur : $D = 80$ mm,
- épaisseur de la paroi : $e = 3$ mm,
- longueur du cylindre : $L = 359$ mm.

Le matériau constitutif du cylindre est un alliage d'aluminium dont les propriétés mécaniques utiles dans notre étude sont :

- le module d'Young : $E = 69$ GPa,
- le coefficient de Poisson : $\nu = 0,33$.

1.4 État de contrainte dans un cylindre sous pression

Lorsque le rapport D/e est supérieur à 20, les parois du cylindre sont considérées comme minces et la contrainte radiale σ_{rr} est alors négligée devant la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et la contrainte longitudinale σ_{zz} . Dans le cas contraire, on parle de

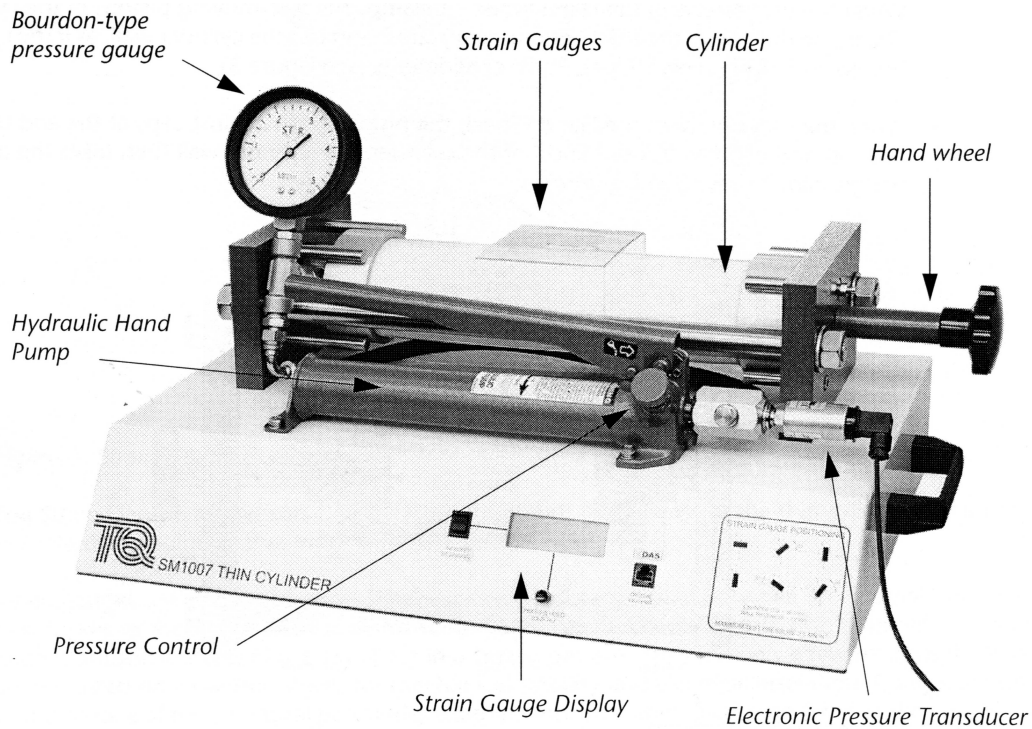


Figure 1.3 – Banc d'essai pour le cylindre sous pression

cylindre à parois épaisses.

Par ailleurs, si le cylindre est suffisamment long, nous pouvons faire l'hypothèse que l'état de contrainte est uniforme dans ce dernier.

Compte tenu des éléments qui précèdent, le tenseur des contraintes, exprimé dans le repère cylindrique lié à la géométrie du cylindre et relatif au chargement imposé, prend la forme :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

La contrainte circonférentielle se calcule en étudiant l'équilibre d'un demi-cylindre obtenu en coupant le système entier dans le sens longitudinal (figure 1.4). On obtient alors :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pD}{2e} \quad (1.4)$$

où p est la pression exercée sur la paroi intérieure du cylindre.

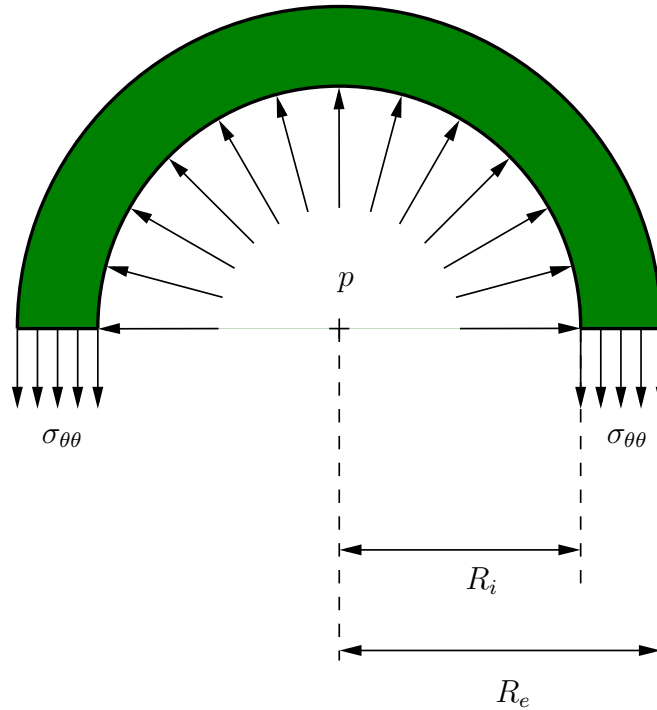


Figure 1.4 – Calcul de $\sigma_{\theta\theta}$

La contrainte longitudinale se calcule en étudiant l'équilibre d'une partie de cylindre obtenue en coupant le système entier suivant une section droite (figure 1.5). On obtient alors :

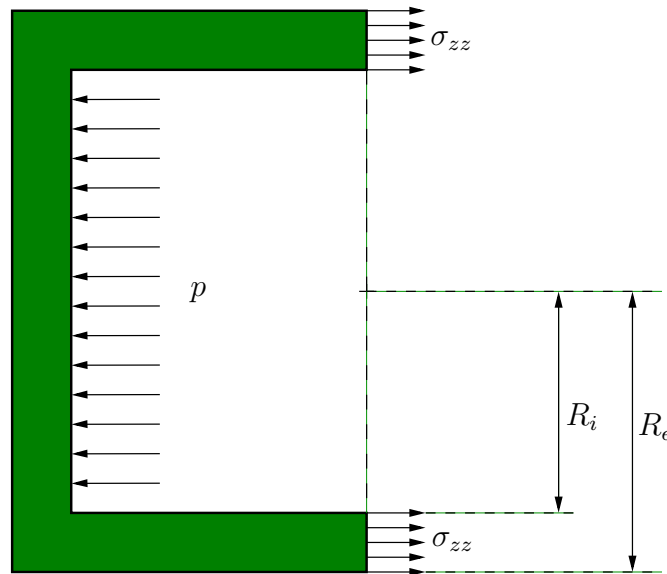
$$\sigma_{zz} = \frac{pD}{4e} \quad (1.5)$$

1.4.1 Cas A : cylindre ouvert

Dans le cas A, le cylindre subit uniquement des contraintes circonférentielles. En effet, le chargement longitudinal, normalement généré par l'effet de la pression sur les extrémités, est ici directement transmis au cadre rigide (figure 1.6) sans passer dans l'enveloppe du cylindre. Cette disposition permet d'étudier l'état de déformation du cylindre en absence de contraintes longitudinales et ainsi, de mettre en évidence l'effet de Poisson.

Le tenseur des contraintes relatif au chargement imposé au cylindre prend la forme :

$$[\sigma] = \frac{pD}{2e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Figure 1.5 – Calcul de σ_{zz}

1.4.2 Cas B : cylindre fermé

Dans le cas B, le chargement longitudinal n'est plus repris par le cadre rigide (figure 1.7). Le cylindre subit donc une contrainte circonférentielle ainsi qu'une contrainte longitudinale.

Le tenseur des contraintes relatif au chargement imposé au cylindre prend la forme :

$$[\sigma] = \frac{pD}{4e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

1.5 Expérimentation

Avant de commencer votre travail expérimental sur le cylindre, il est nécessaire d'approfondir un peu les développements présentés plus haut :

1. redémontrez les expressions liants les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} à la pression p ,
2. à l'aide des lois de comportement du matériau (linéaire-élastique-isotrope), définissez le tenseur des déformations dans chacun des deux cas.

Pour les cas A et B, réalisez une série de mesures et d'analyses des données :

1. à l'aide des jauges de déformation, mesurez les déformations que subit le cylindre en fonction de la pression p (ne dépassez jamais la pression de 35 bars),

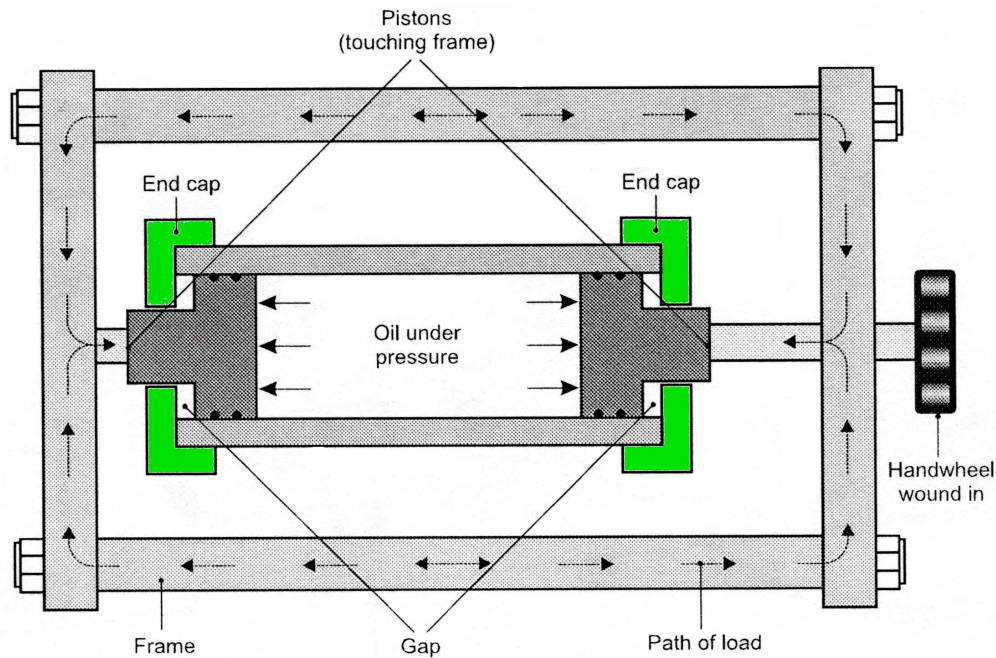


Figure 1.6 – Cylindre sous pression : cas A

2. tracez les fonctions $\varepsilon = f(p)$. Que dire de la relation entre ces deux grandeurs ? En déduire une grandeur caractéristique du matériau,
3. à l'aide du graphique adéquat, déterminer la seconde grandeur mécanique caractéristique de notre matériau.

Pour une pression interne de 30 bars et dans chacun des deux cas, tracez le cercle de Mohr des déformations en utilisant les informations fournies par seulement deux jauges (J_1 et J_2). Expliquez votre démarche.

Pour une pression interne de 30 bars et dans chacun des deux cas, traces le cercle de Mohr des déformations en utilisant le cadre général (il vous faudra alors 3 jauges correctement orientée spatialement : J_3, J_4 et J_5). Définir à l'aide du cercle de mohr, l'angle entre J_1 et J_4 .

Conclure sur l'utilisation du cercle de Mohr pour l'analyse de l'état de déformation d'un solide dans le cadre général.

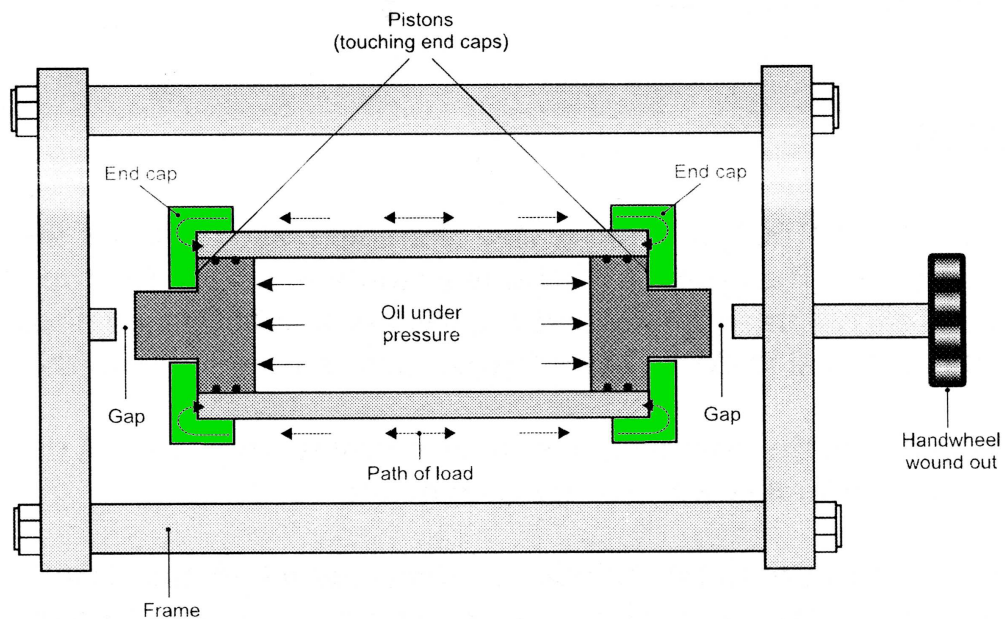


Figure 1.7 – Cylindre sous pression : cas B

Sujet n° 2

Comportement élastique des poutres en flexion



Figure 2.1 – Poutre de soutien d'un tablier de pont

2.1 Objectif

L'objectif de ce TP (figure 2.2) est de vérifier par l'expérimentation les éléments de la théorie de poutre proposée par Bernoulli. En faisant varier le chargement et les conditions aux limites, les matériaux constitutifs et les géométries des sections, les mesures de déplacement seront comparées avec les valeurs prédites par la théorie. On pourra alors discuter sur la notion de rigidité d'une poutre et sur les paramètres qui l'influencent.

2.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental de ce TP est constitué d'un bâti rigide constitué d'une traverse inférieure et d'une traverse supérieure graduée sur lesquelles peuvent être fixés diverses instruments permettant de reproduire et mesurer une multitude de chargements.

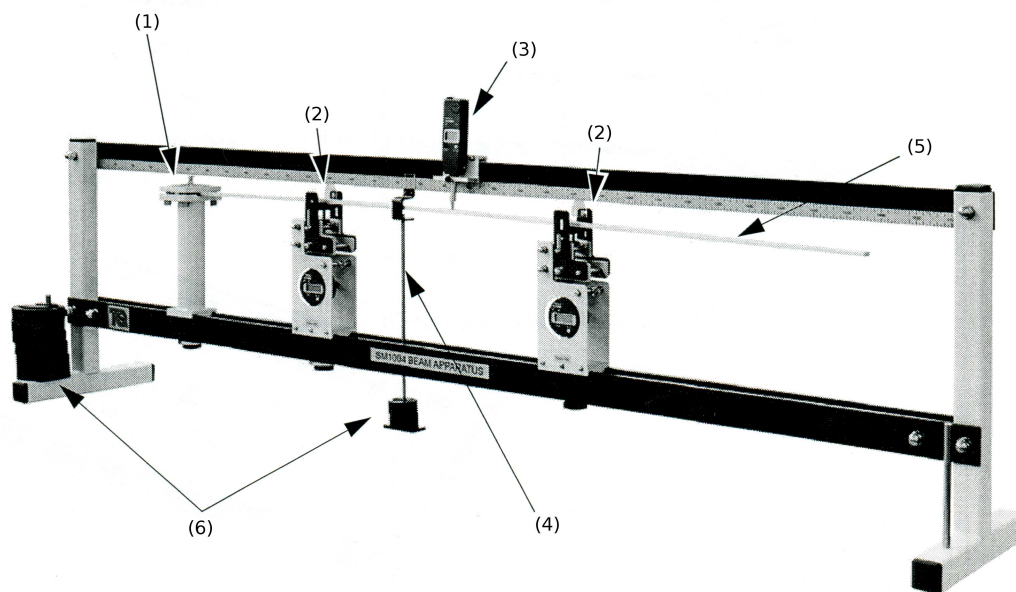


Figure 2.2 – Banc d'essai pour la flexion des poutres

Les principaux éléments à notre disposition sont :

- un support permettant la réalisation d'une liaison encastrement (1),
- deux supports permettant soit la réalisation d'appuis plans, soit l'application d'un chargement extérieur vertical ascendant (2),
- trois comparateurs digitaux mesurant les déplacements (3),
- un dispositif de chargement par poids (4) et (6),
- un jeu varié de poutre (5).

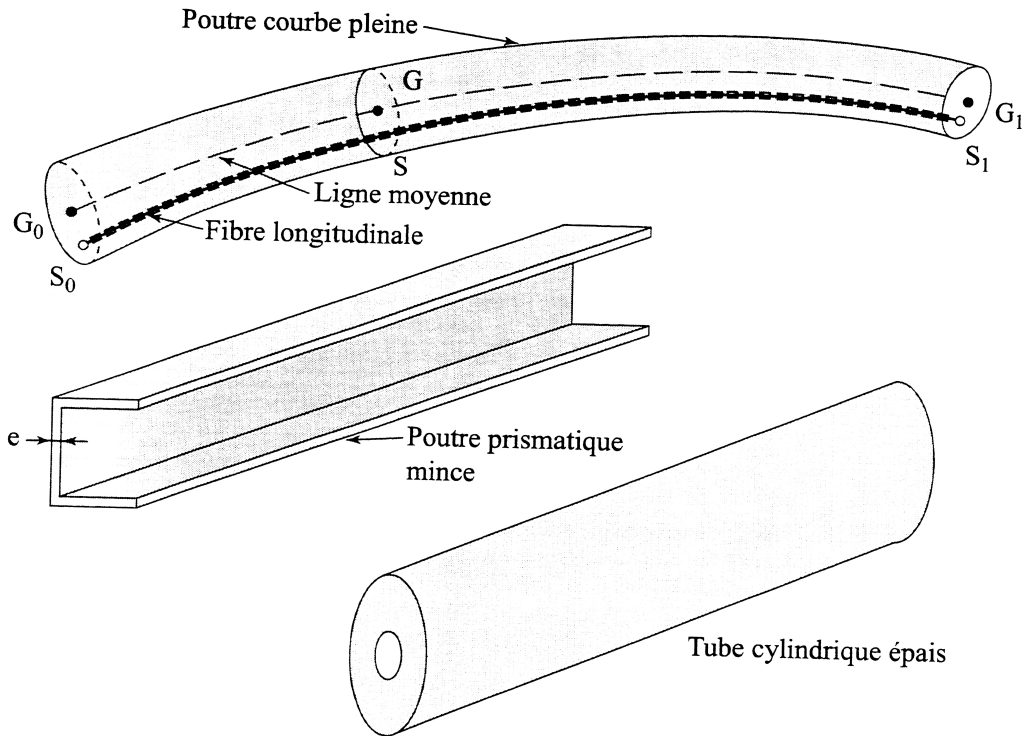


Figure 2.3 – Éléments de géométrie d'une poutre

2.3 Éléments de théorie des poutres : approche de Bernoulli

Les définitions et formules principales de la théorie des poutres sont indiquées ci-dessous dans le cas d'un problème de flexion dans un plan.

2.3.1 Géométrie d'une poutre

Une poutre est un solide élancé qui peut être défini à partir d'une courbe orientée Γ et d'une section S , normale à Γ . À chaque section de poutre, nous associons un repère et différentes caractéristiques géométriques :

- l'origine du repère : G ,
- l'axe tangent à la courbe Γ : \vec{e}_1 ,
- les axes définissant la section S : \vec{e}_2 et \vec{e}_3 ,
- la surface de la section S : $A = \iint_S ds$,
- le centre de section : $\vec{OG} = \frac{1}{S} \iint_S \vec{OM} ds$,
- les moment quadratiques : $I_2 = \iint_S x_3^2 ds$ et $I_3 = \iint_S x_2^2 ds$,

2.3.2 Actions mécaniques et torseurs associés

D'un point de vue mathématique, la géométrie d'un solide est décrite dans un espace euclidien. Les actions mécaniques appliquées à ce solide peuvent agir par contact ou par action à distance. La réalité physique d'une action mécanique peut être assez complexe mais elle peut toujours être représentée, dans un espace vectoriel associé à l'espace affine, par un torseur.

Un torseur se caractérise par ses éléments de réduction en un point :

1. le vecteur résultante qui est constant en tous points de l'espace,
2. le vecteur moment qui vérifie la formule de transport des moments.

$$\hat{\mathcal{T}}_{F \rightarrow S}(P) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{F \rightarrow S} \\ \vec{M}_{F \rightarrow S}(P) \end{array} \right\}_{P,R} \quad \text{avec} \quad \vec{M}_{F \rightarrow S}(P) = \vec{M}_{F \rightarrow S}(O) + \vec{PO} \wedge \vec{R}_{F \rightarrow S}$$

2.3.3 Liaisons cinématiques et torseurs associés

Le tableau 2.4 recense les caractéristiques utiles de quelques liaisons cinématiques parmi les plus souvent rencontrées. Il doit vous permettre d'identifier les conditions aux limites nécessaires à la détermination des constantes d'intégration que l'on peut rencontrer dans la résolution d'un problème de poutre en flexion.

2.3.4 Efforts intérieurs pour une poutre

Afin de calculer les efforts intérieurs qui s'exercent au sein de la poutre, nous coupons cette dernière en deux parties, notées (I) et (II) sur la figure 2.5.

La courbe Γ étant orientée, nous distinguons la partie amont (à gauche sur la figure 2.6) de la partie aval (à droite sur la figure 2.6). Nous cherchons :

$$\hat{\mathcal{T}}_{(II) \rightarrow (I)}(G) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M} \end{array} \right\}_{G,R}$$

le torseur des efforts internes exercés par la partie aval sur la partie amont. Le principe d'équilibre statique appliqué à la partie aval permet d'écrire :

$$\hat{\mathcal{T}}_{FI \rightarrow (II)}(G) + \hat{\mathcal{T}}_{(I) \rightarrow (II)}(G) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G,R}$$

où $\hat{\mathcal{T}}_{FI \rightarrow (II)}(G)$ est le torseur des efforts exercés par l'environnement extérieur sur la partie aval de la poutre. En vertu du principe d'action/réaction, nous obtenons :

$$\hat{\mathcal{T}}_{(II) \rightarrow (I)}(G) = \hat{\mathcal{T}}_{FI \rightarrow (II)}(G)$$

Pour un problème plan, les éléments du torseur des efforts internes calculé en G sont :

$$\hat{T}_{(II) \rightarrow (I)}(G) = \begin{pmatrix} N & - \\ T & - \\ - & M_f \end{pmatrix}_{G,R}$$

où :

- N est appelé effort normal et est porté par \vec{e}_1 ,
- T est appelé effort tranchant et est porté par \vec{e}_2 ,
- M_f est appelé moment de flexion et est porté par \vec{e}_3 .

2.3.5 Équations d'équilibre d'une poutre

Notons $\vec{p}(x_1) = \rho_1(x_1)\vec{e}_1 + \rho_2(x_1)\vec{e}_2$ le chargement réparti sur la poutre. L'équilibre statique local de la poutre s'écrit en tous points :

$$\begin{cases} \frac{dN(x_1)}{dx_1} + \rho_1(x_1) = 0 \\ \frac{dT(x_1)}{dx_1} + \rho_2(x_1) = 0 \\ \frac{dM_f(x_1)}{dx_1} + T(x_1) = 0 \end{cases}$$

2.3.6 Contraintes dans une section droite

Le comportement élastique de la poutre permet d'estimer les contraintes normales à la section de la poutre en fonction des efforts intérieurs (figure 2.7) :

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{N(x_1)}{A} - x_2 \frac{M_f(x_1)}{I_3}$$

2.3.7 Déformations et déplacements

Le comportement élastique du matériau permet d'obtenir les déformations élémentaires :

$$\begin{cases} \text{déformation axiale : } \varepsilon = \frac{N}{EA} \\ \text{courbure : } \chi = \frac{M_f}{EI_3} \end{cases}$$

Le déplacement du centre d'une section, noté $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$ est donc défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{déformation axiale : } \frac{du_1(x_1)}{dx_1} = \frac{N(x_1)}{EA} \\ \text{courbure : } \frac{d^2u_2(x_1)}{dx_1^2} = \frac{M_f(x_1)}{EI_3} \end{array} \right.$$

2.4 Expérimentation

2.4.1 Poutre en flexion console

Pour cette première manipulation, nous vous proposons d'étudier le comportement mécanique d'une poutre :

- en aluminium,
- à section rectangulaire,
- d'une longueur $L = 400$ mm,
- encastree à une extrémité,
- subissant une force ponctuelle verticale descendante à l'autre extrémité,
- équipée de 2 jauges de déformation à $L/2$.

Ce dispositif, ainsi que les diagrammes des efforts intérieurs associés, sont représentés sur la figure 2.8.

1. À l'aide du PFS, déterminez les réactions aux appuis en O de F ,
2. déterminez $T(x_1)$ et $M_f(x_1)$,
3. déterminez $u_2(x_1)$ en précisant les conditions aux limites utilisées pour déterminer les constantes d'intégration,
4. calculez la contrainte maximale dans la poutre en fonction de F , précisez sa localisation,
5. postulant que nous ne souhaitons pas dépasser la limite élastique du matériau, calculez la force maximale à ne pas dépasser.
6. procédez à votre expérimentation en relevant les mesures de la flèche $u_2(L)$ et les mesures des déformations ε fournies par les deux jauges,
7. pour la valeur F_{max} calculée, mesurez $u_2(x_1)$ le long de la poutre,
8. tracez les graphiques comparant les mesures effectuées aux valeurs calculées à l'aide de la théorie des poutres,
9. déterminez graphiquement la rigidité de la poutre,
10. déduisez en le module d'Young de la poutre,

11. concluez.

Dans la mesure du possible, répétez la démarche pour une poutre en acier et une poutre en laiton.

2.4.2 Poutre en flexion 3 points

Pour cette deuxième manipulation, nous vous proposons d'étudier le comportement mécanique d'une poutre :

- en aluminium,
- à section rectangulaire,
- d'une longueur $L = 400$ mm,
- sur appui simple à chacune de ses extrémités,
- subissant une force ponctuelle verticale descendante à $L/2$,
- équipée d'une jauge de déformation à $L/2$.

Ce dispositif, ainsi que les diagrammes des efforts intérieurs associés, sont représentés sur la figure 2.9.

1. À l'aide du PFS, déterminez les réactions aux appuis en A et B en fonction de F ,
2. précisez $T(x_1)$ et $M_f(x_1)$,
3. déterminez $u_2(x_1)$ en précisant les conditions aux limites utilisées pour déterminer les constantes d'intégration,
4. calculez la contrainte maximale dans la poutre en fonction de F , précisez sa localisation,
5. postulant que nous ne souhaitons pas dépasser la limite élastique du matériau, calculez la force maximale à ne pas dépasser.
6. procédez à votre expérimentation en relevant les mesures de la flèche $u_2(L/2)$ et les mesures des déformations ε fournies par la jauge,
7. pour la valeur F_{max} calculée, mesurez $u_2(x_1)$ le long de la poutre,
8. tracez les graphiques comparant les mesures effectuées aux valeurs calculées à l'aide de la théorie des poutres,
9. déterminez graphiquement la rigidité de la poutre,
10. déduisez en le module d'Young de la poutre,
11. concluez.

Afin de mettre en évidence le rôle de I_3 dans la rigidité de la poutre, refaite la démarche pour une poutre en aluminium à section en U. Concluez.

Dans la mesure du possible, répétez la démarche pour une poutre en acier et une poutre en laiton.

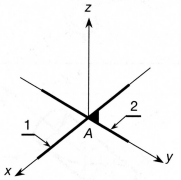
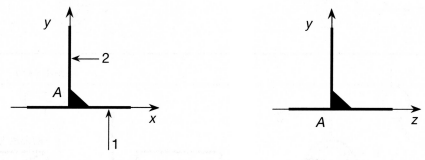
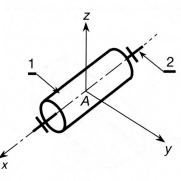
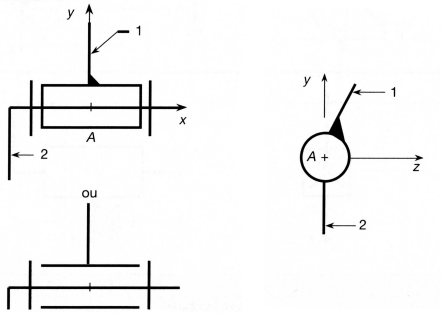
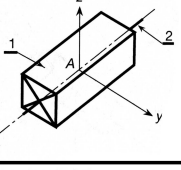
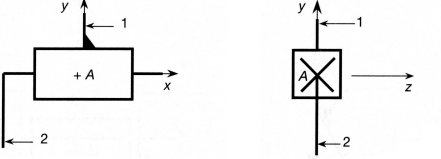
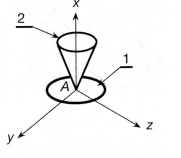
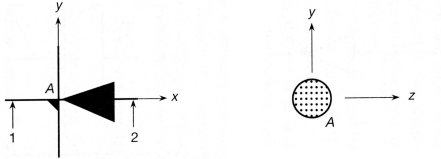
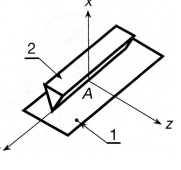
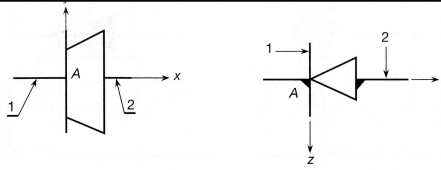
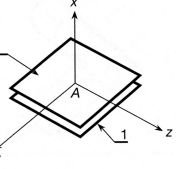
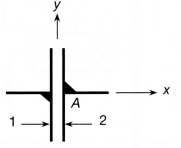
Désignation de la liaison	Symbole spatial	Symbole plan	Torseur cinématique associé	Torseur d'action mécanique associé
Encastrement			$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_A$
Pivot			$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_A$
Glissière			$\begin{Bmatrix} 0 \\ v_x \\ 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_A$
Ponctuelle			$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$
Linéaire rectiligne			$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ v_y \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$
Appui plan			$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ v_y \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$

Figure 2.4 – Quelques liaisons cinématiques usuelles

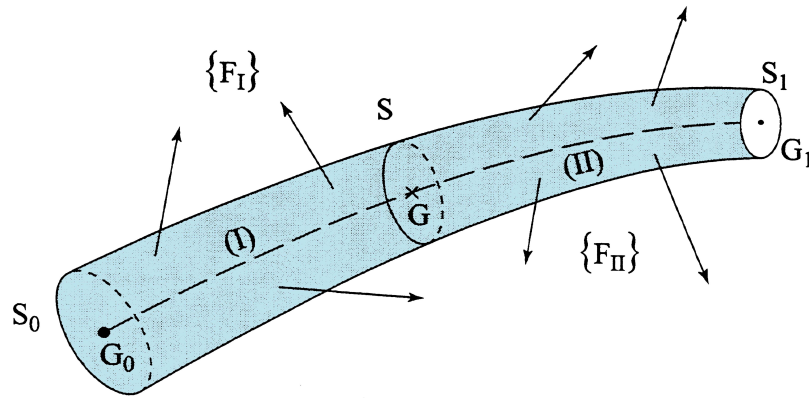


Figure 2.5 – Poutre soumise à des actions extérieures

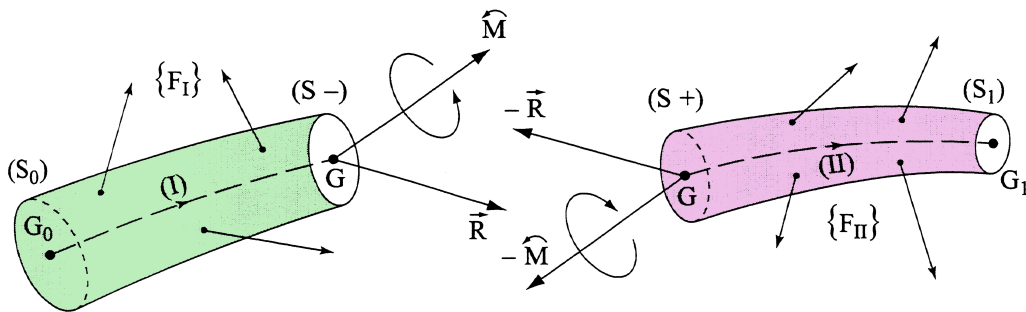


Figure 2.6 – Mise en évidence des efforts intérieurs

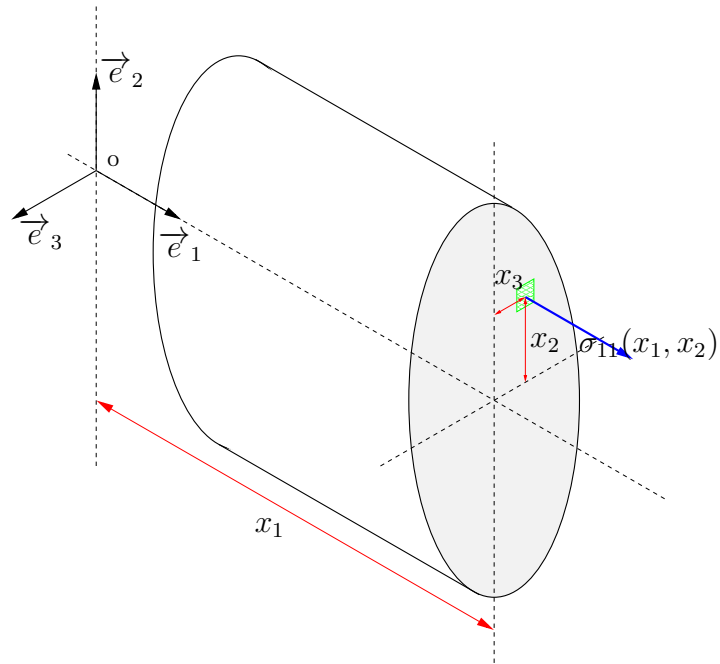


Figure 2.7 – Contrainte normale à la section droite

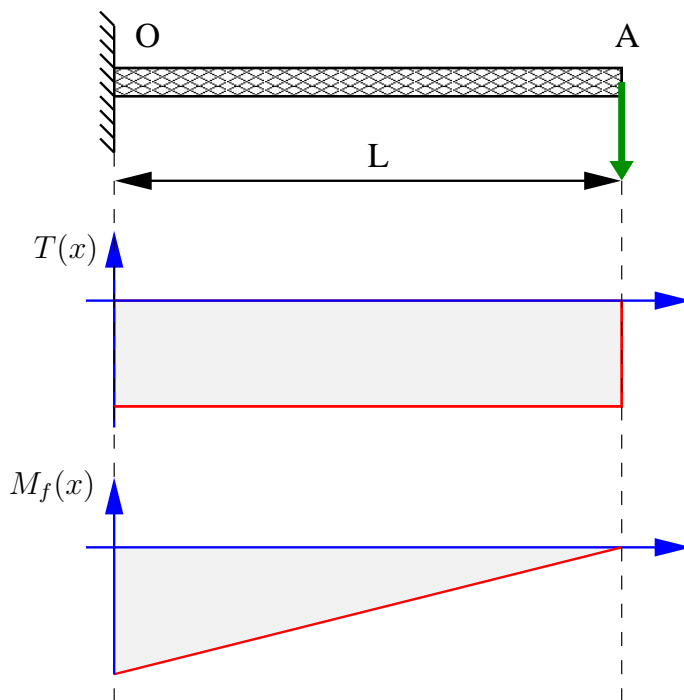


Figure 2.8 – Diagramme des efforts intérieurs d'une poutre en flexion console

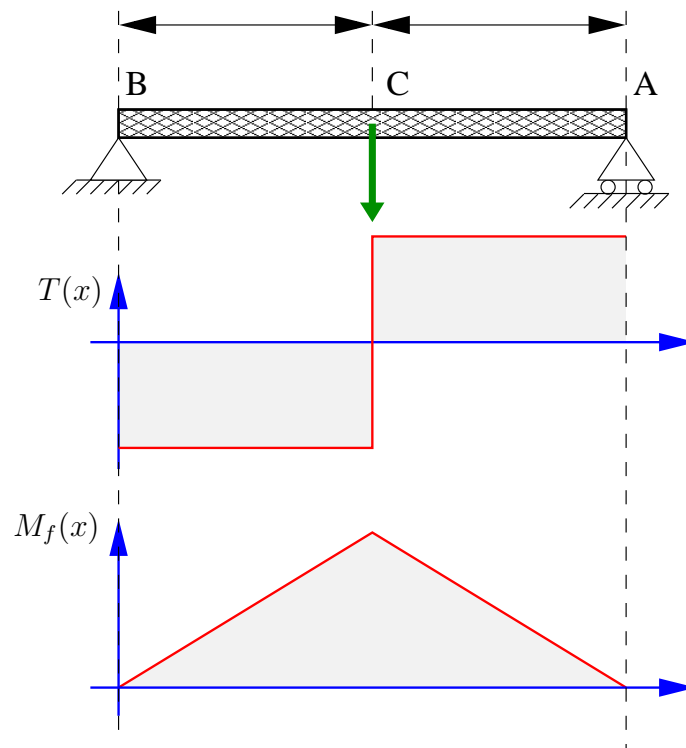


Figure 2.9 – Diagramme des efforts intérieurs d'une poutre en flexion 3 points

Sujet n° 3

Étude d'un treillis plan



Figure 3.1 – Exemple d'utilisation des structures de type treillis

3.1 Objectif

On appelle treillis de barres tout assemblage de barres reliées entre elles, à leurs extrémités, par des rotules constituant les nœuds. Dans une telle structure, il est possible de montrer que chacune des barres ne travaille qu'en traction pure ou en compression pure.

De nombreuses structures sont réalisées par assemblage de poutres prismatiques longues. Ces assemblages sont réalisés par soudage, boulonnage ou rivetage (grues, pylônes de lignes électriques ...). De telles structures ne répondent pas exactement à la définition que nous venons de donner des treillis puisque que les nœuds ne sont pas des articulations et peuvent donc transmettre des couples. Cependant, les calculs montrent que les effets de l'effort normal y sont tout à fait prépondérants devant ceux des autres sollicitations. Ces structures peuvent donc être considérées et calculées comme des treillis avec une très bonne approximation.

Au niveau de la conception d'une structure, on doit penser en premier lieu à la solution treillis : celle-ci est en effet légère, simple et économique.



Figure 3.2 – Banc expérimental pour l'analyse de treillis plan (photo)

L'objectif de ce TP est d'étudier les efforts internes aux barres d'un treillis plan sollicité par une force extérieure simple. Les efforts appliqués sur les barres sont calculés à

partir des déformations mesurées par des jauges extensométriques. Ces efforts sont ensuite comparés avec ceux calculés théoriquement.

3.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est composé d'un cadre rigide (le bâti) en acier sur lequel peut être monté un treillis en associant un certain nombre de barres en acier. Les barres sont liées entre elles par des nœuds permettant de s'approcher au maximum des liaisons pivots théoriques. Ainsi, aucun moment n'est transmis dans le nœud et les barres ne travaillent qu'en traction/compression : c'est le principe même des treillis de barres. Par ailleurs, ces liaisons sont considérées comme parfaites : il n'y a pas de frottement.

Sur la figure 3.3, nous distinguons :

- les appuis (1),
- le dispositif de chargement (2),
- les disques de jonction (3),
- les barres en acier (4),
- le bâti (5).

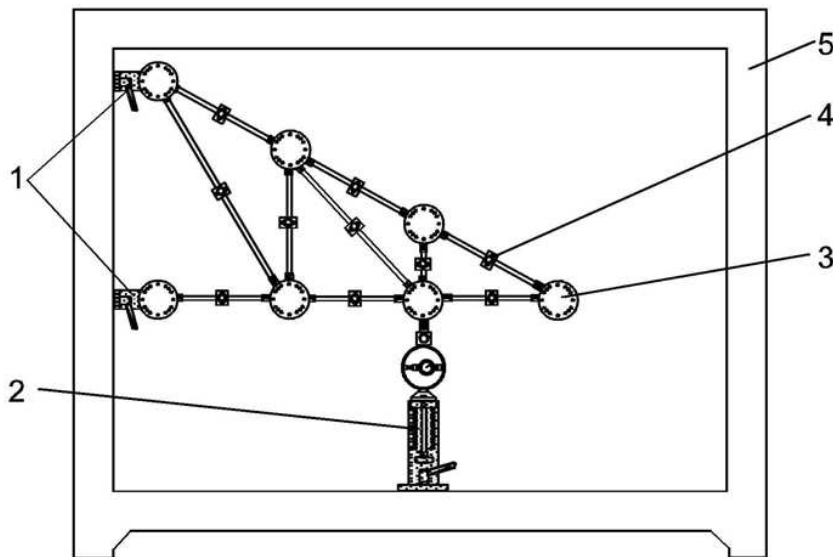
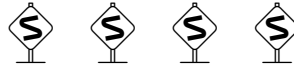


Figure 3.3 – Banc expérimental pour l'analyse de treillis plans (schéma)

La figure 3.4 montre le principe de fonctionnement des disques de jonction. Ils permettent de réaliser un angle de 30° , 45° , 60° ou 90° entre les barres.



Pour chacun des disques de jonction qui sont insérés dans le treillis, il est impératif qu'une barre soit connectée à la position munie d'une tige de blocage.

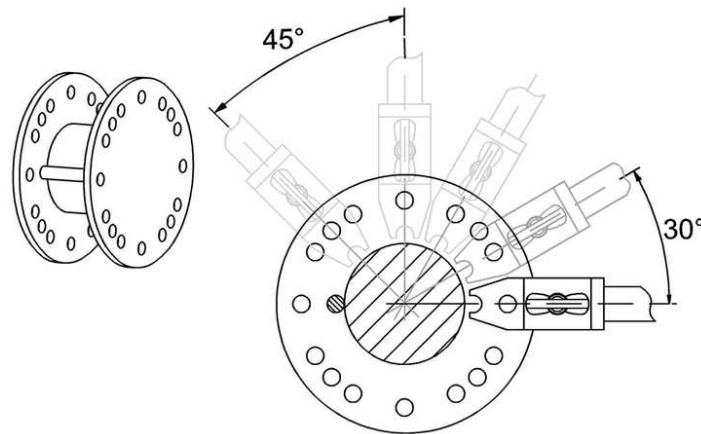
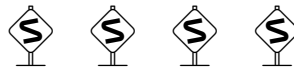


Figure 3.4 – Disque de jonction (schéma de principe)

Nous disposons de 19 barres de longueurs diverses :

- 2 barres de 150 mm,
- 5 barres de 259 mm,
- 7 barres de 300 mm,
- 1 barre de 397 mm,
- 3 barres de 424 mm,
- 1 barre de 520 mm.

Un dispositif de charge, placé entre un disque de jonction et le cadre rigide, permet de créer le chargement extérieur. Ses caractéristiques sont :

- plage de chargement : $\pm 500 N$,
- dispositif de mesure du chargement : anneau dynamométrique,
- graduation : 10 N .

3.3 Éléments sur la résolution des treillis de barres

Afin de calculer théoriquement les efforts générés dans les barres, nous commençons par identifier les éléments du treillis :

- les noeuds sont identifiés par des lettres,

- les barres sont identifiés par des chiffres.

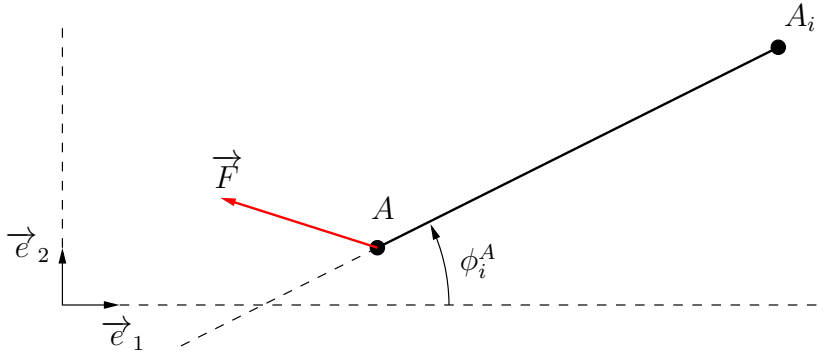


Figure 3.5 – Équilibre des nœuds d'un treillis - projection

Soit A un nœud du treillis relié à d'autres nœuds A_i par les barres AA_i (figure 3.5). Appelons \vec{F} la résultante des forces extérieures, données et de liaisons, appliquées au nœud A . Notons ϕ_i^A l'angle polaire de $\overrightarrow{AA_i}$ par rapport à \vec{e}_1 et N_i l'effort normal algébrique dans la barre AA_i . Ainsi, si \vec{N}_i est la force exercée par la barre AA_i sur le nœud A , N_i est bien sa valeur algébrique sur l'unitaire de $\overrightarrow{AA_i}$.

L'équilibre des forces appliquées au nœud A s'écrit :

$$\vec{F} + \sum \vec{N}_i = \vec{0} \quad (3.1)$$

la sommation sur l'indice i portant sur l'ensemble des barres issues de A . Après projection sur les vecteurs de la bases (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , nous obtenons :

$$\begin{cases} F_x + \sum N_i \cos \phi_i^A = 0 \\ F_y + \sum N_i \sin \phi_i^A = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

En écrivant ainsi l'équilibre des n nœuds composants le treillis, on obtient un système linéaire à $2n$ équations.

☞ Calculez de manière analytique les efforts dans les barres des treillis des figures 3.9 et 3.10 en fonction de F .

3.4 Expérimentation

Dans un premier temps, nous allons prendre en main les dispositifs de mesures expérimentales utilisés sur le banc d'essai :

1. évaluez la précision du dynamomètre en le chargeant progressivement à l'aide de masse (figure 3.6),
2. avec l'aide de l'enseignant, caractérisez le matériau constitutif des barres (détermination du module d'Young E) par un essai de traction simple sur la machine EM550 (figure 3.7),
3. évaluez la précision de la mesure des déformations dans les barres par les jauges extensométriques et de l'amplificateur FL151 en effectuant un essai de traction simple sur une barre chargée à l'aide du dispositif de chargement (figure 3.8).



Figure 3.6 – Validation du dynamomètre

Vous allez maintenant travailler sur le treillis schématisé sur la figure 3.9 dont le détail est :

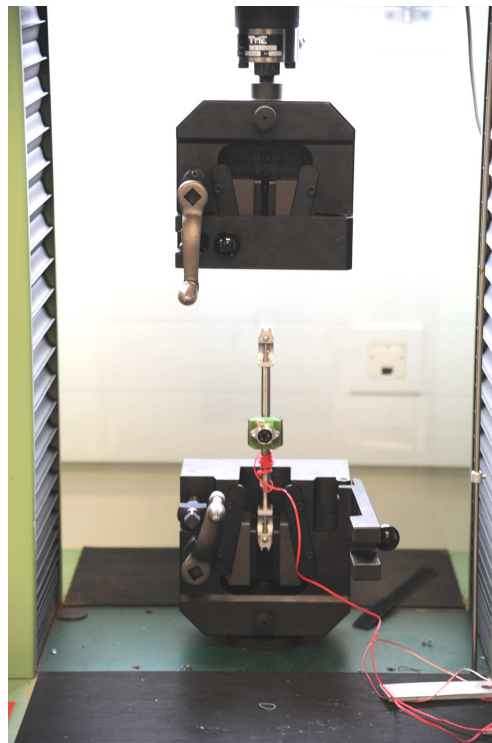


Figure 3.7 – Caractérisation du matériau

- distance entre A et B : 450 mm,
- longueur de la barre (1) : 150 mm,
- longueur des barres (2) : 259 mm,
- longueur des barres (3) : 300 mm,
- longueur de la barre (4) : 397 mm,
- longueur de la barre (5) : 520 mm.

La force F que vous devez imposer au treillis est de 200 N. Attention, vous ne devez jamais imposer une force extérieure qui générerait un effort dans une barre supérieur à 500 N.

Construisez le treillis et vérifiez votre résultat analytique à l'aide de l'amplificateur FL151 et des jauges de déformations.

Faire une nouvelle analyse pour le treillis de la figure 3.10 dont les caractéristiques sont :

- distance entre A et B : 300 mm,
- longueur de la barre (1) : 150 mm,
- longueur des barres (2) : 259 mm,

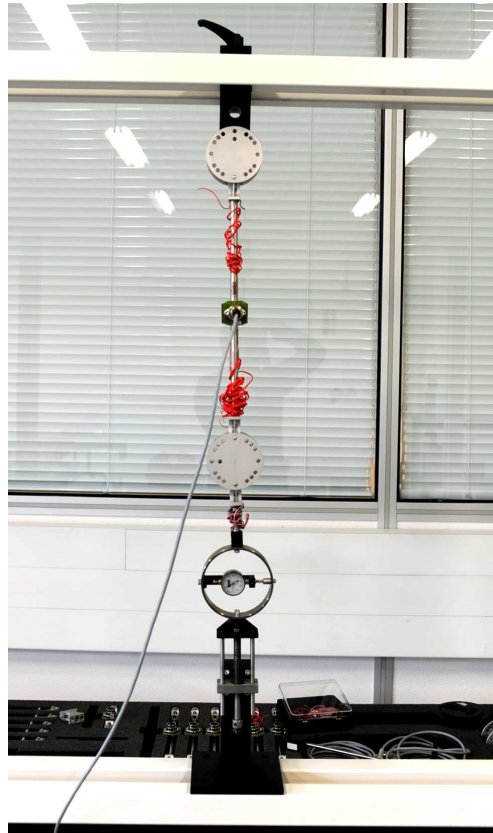


Figure 3.8 – Validation de la mesure des déformations

- longueur des barres (3) : 300 mm,
- longueur de la barre (4) : 424 mm.

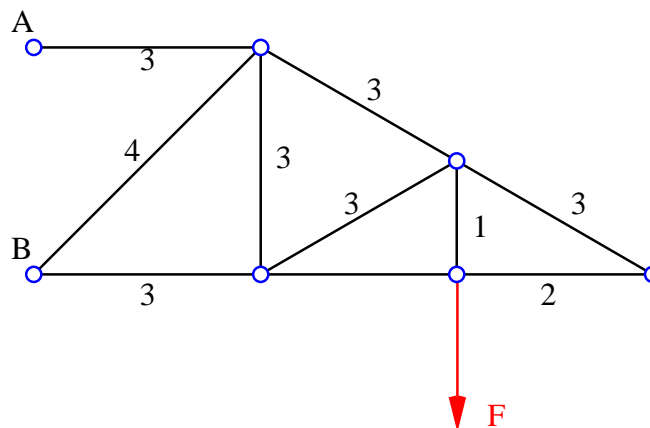


Figure 3.10 – Second dispositif étudié

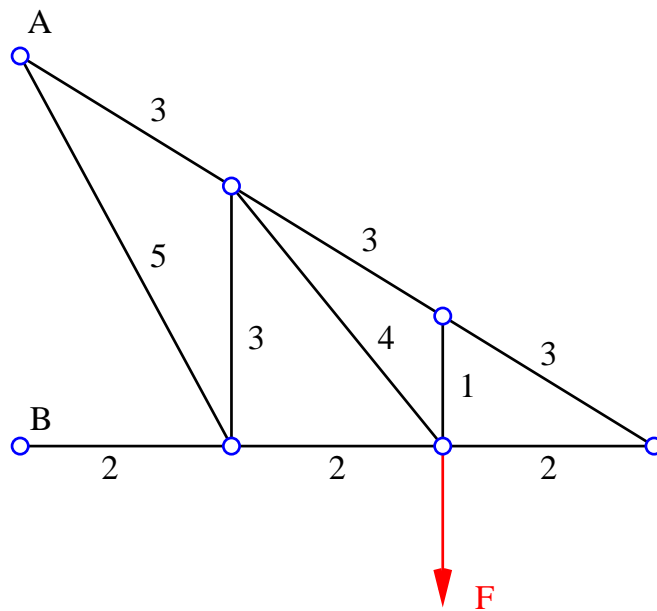


Figure 3.9 – Premier dispositif étudié

Sujet n° 4

Flambement des structures élancées



Figure 4.1 – Flambement de rails sous l'effet de la dilatation thermique

4.1 Objectif

Le flambage est un phénomène d'instabilité d'une structure. L'utilisation la plus commune de ce terme fait référence au flambage d'une poutre caractérisé par l'apparition brutale d'un mouvement dans une direction perpendiculaire à celle de la sollicitation de compression.

D'une manière générale, ce phénomène peut très souvent conduire à la ruine de la structure. Si on cherche le plus souvent à l'éviter, on peut au contraire rechercher ce phénomène. Flambage élastique dans le cas du saut à la perche ou plastique, qui permet de dissiper de l'énergie, dans le cas du *crash automobile*.

C'est un phénomène difficile à prévoir car il est fortement sensible aux :

- imperfections géométriques (défauts, par exemple pour une coque à des variations d'épaisseur, pour un cylindre circulaire à des variations d'ovalisation...);
- imperfections matérielles (variation des propriétés mécaniques comme le module d'Young ou la limite d'élasticité...);
- conditions aux limites.

L'objectif de ce TP est d'aborder le phénomène de flambement des poutres. Cette instabilité de structure, beaucoup d'entre vous l'ont déjà observée en jouant avec leur règle en plastique. Elle se caractérise par l'apparition brutale d'un mouvement latéral dans une direction perpendiculaire au chargement appliqué.

L'approche d'Euler du flambement des poutres en compression permet de prédire analytiquement la charge critique pour laquelle apparaît le phénomène. Elle fait intervenir les paramètres intrinsèques du système : la longueur de la poutre, le moment d'inertie de la section droite, le matériau constitutif ainsi que les conditions aux limites.

Grâce au large choix de poutres à votre disposition, vous allez pouvoir vérifier les résultats apportés par l'approche d'Euler.

4.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental comprend (figure 4.3) :

- le dispositif de chargement (1),
- la traverse de chargement réglable en hauteur (2),
- le comparateur à cadran (3),
- le dynamomètre et son cadran (4) et (6),
- la poutre (8),
- un dispositif de chargement transverse (7).



Figure 4.2 – Banc expérimental pour le flambement des poutres (photo)

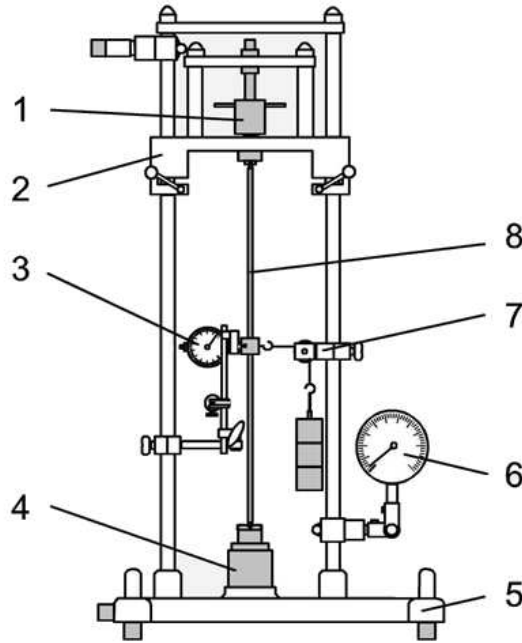


Figure 4.3 – Banc expérimental pour le flambement des poutres (schéma)

4.3 Éléments de l'approche théorique d'Euler

La théorie du flambage d'Euler est basée sur l'hypothèse que lors du flambement de la poutre, les déplacements ne demeurent plus petits. Il n'est donc plus possible de confondre les configurations initiale et déformée.

En conséquence les équations d'équilibre de la poutre sont écrites dans la configuration déformée.

On se place dans une configuration déformée avec une légère flèche de la poutre. La poutre se trouve donc soumise à un chargement de compression **et** de flexion. Le moment fléchissant vaut en tout point de la poutre :

$$M_f(x_1) = -F u_2(x_1) \quad (4.1)$$

L'équation de la déformée en flexion s'écrit :

$$M_f(x_1) = E I_3 \frac{\partial^2 u_2(x_1)}{\partial x_1^2} \quad (4.2)$$

On obtient une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, qui plus est homogène :

$$\frac{\partial^2 u_2(x_1)}{\partial x_1^2} + \frac{F}{E I_3} u_2(x_1) = 0 \quad (4.3)$$

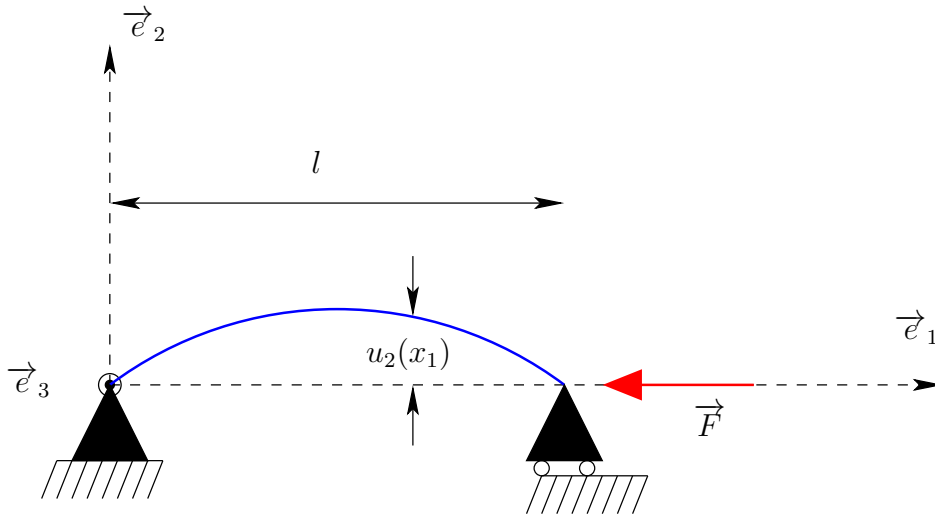


Figure 4.4 – Flambage d'une poutre en appui simple et appui glissant

En posant :

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{E I_3}} \quad (4.4)$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$u_2(x_1) = A \cos(\omega x_1) + B \sin(\omega x_1) \quad (4.5)$$

Compte-tenu des conditions aux limites $u_2(0) = u_2(l) = 0$, il vient $A = 0$ et $B \sin(\omega l) = 0$ soit comme solution non triviale :

$$\omega = \frac{k \pi}{l} \quad \text{avec} \quad k \geq 1 \quad (4.6)$$

La valeur de k est le mode de flambement.

La première valeur de $\omega_c = \frac{\pi}{l}$ est associée à la première valeur de l'effort F pour lequel la poutre flambe. Cette charge est nommée charge critique d'Euler :

$$F_c = \frac{\pi^2 E I_3}{l^2} \quad (4.7)$$

La déformée, qui reste imparfaitement connue, s'écrit alors :

$$u_2(x_1) = B \sin\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) \quad (4.8)$$

Les différentes charges critiques peuvent s'écrire de manière générale :

$$F_c = \frac{\pi^2 E I_3}{L^2} \quad \text{avec} \quad L = \frac{l}{k} \quad \text{qui désigne la longueur libre de flambement.} \quad (4.9)$$

Si on changeait les conditions aux limites, on pourrait toujours écrire F_c de cette manière mais avec différentes valeurs pour la longueur libre de flambement.

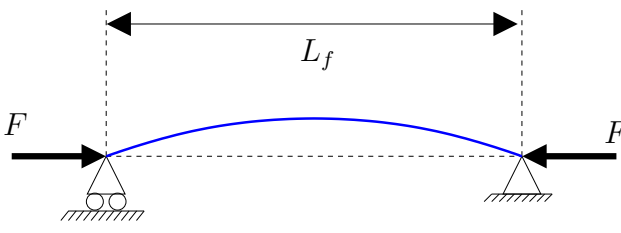
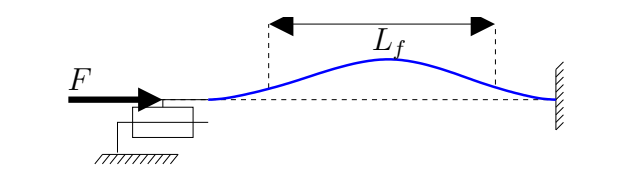
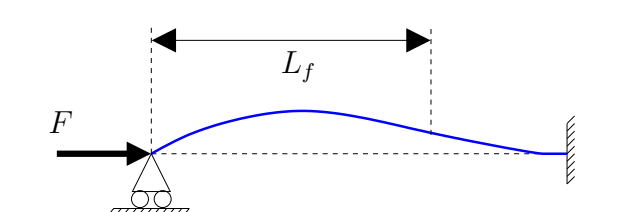
Allure de la déformée	Force critique	longueur de flambement
	$F_c = \frac{\pi^2 EI_3}{L^2}$	$L_f = L$
	$F_c = \frac{4\pi^2 EI_3}{L^2}$	$L_f = 0.5L$
	$F_c = \frac{2\pi^2 EI_3}{L^2}$	$L_f = 0.7L$

Figure 4.5 – Influence des conditions limites

Pour différencier les situations où un calcul de flambement est nécessaire de celles où le seul calcul de la réponse en compression suffit, on définit l'élancement de la poutre comme le rapport :

$$\lambda = \frac{L}{r} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{\frac{I_3}{S}} \quad (4.10)$$

rayon de giration de la section droite de surface S et de moment quadratique I_3 .

La charge critique peut se réécrire :

$$F_c = \frac{\pi^2 E S}{\lambda^2} \quad (4.11)$$

On peut également faire apparaître la contrainte de compression critique :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4.12)$$

A partir de la valeur de l'élanement, on pourra quantifier le risque de flambage :

- $\lambda < 20$ faible,
- $20 \leq \lambda < 50$ moyen,
- $50 \leq \lambda < 80$ fort,
- $80 \leq \lambda$ extrême.

4.4 Expérimentation

Vous allez réaliser une série de mesures permettant de mettre en évidence l'influence des paramètres du système sur la valeur de la charge critique de flambement. Vous pourrez ainsi comparer vos données avec celles calculées à partir de l'équation fournie par la démarche proposée par Euler.

Pour chaque essai, calculez **au préalable** la force théorique de flambement. Ensuite :

- mettez lentement la poutre en charge à l'aide de l'écrou de mise en charge,
- lisez la flèche sur le comparateur à cadran et notez la force tous les $0.25mm$ jusqu'à $1mm$,
- à partir de $1mm$, il est suffisant de noter la flèche et la force tous les $0.5mm$ jusqu'à l'apparition du flambement.

L'essai est terminé dès que la force de chargement lue sur le cadran n'augmente plus malgré l'actionnement de l'écrou de chargement. N'allez pas plus loin sous peine de plastifier la poutre (processus irréversible de déformation).

Pour chacune des poutres que vous allez solliciter, tracez la courbe d'évolution de la charge appliquée en fonction de la flèche mesurée. Déduisez en la charge critique de flambement expérimentale. Comparez la avec la valeur calculée analytiquement en déterminant l'erreur relative entre les deux valeurs.

Plus globalement, il vous est demandé de proposer et mettre en œuvre :

1. une série d'expériences qui mettra en évidence l'influence de la longueur de la poutre sur F_c ,
2. une série d'expériences qui mettra en évidence l'influence de la section de la poutre sur F_c ,
3. une série d'expériences qui mettra en évidence l'influence des propriétés du matériau constitutif de la poutre sur F_c .

4. une série d'expériences qui mettra en évidence l'influence des conditions aux limites sur F_c .

Dans chacun des cas, il est demandé de comparer les résultats expérimentaux avec ceux apportés par l'approche d'Euler, si possible à l'aide de graphiques.

Annexe A

Systèmes d'unités cohérents

Longueur	Masse	Force	Temps	Masse volumique	Pression
<i>m</i>	<i>kg</i>	<i>N</i>	<i>s</i>	<i>kg m⁻³</i>	<i>Pa = N m⁻²</i>
<i>m</i>	<i>kg</i>	<i>kg m s⁻²</i>	<i>s</i>	<i>kg m⁻³</i>	<i>kg m⁻¹ s⁻²</i>
<i>m</i>	<i>10³g</i>	<i>10³kg m s⁻²</i>	<i>s</i>	<i>10³kg m⁻³</i>	<i>10³kg m⁻¹ s⁻²</i>
<i>mm</i>	<i>tonne</i>	<i>N</i>	<i>s</i>	<i>tonne mm⁻³</i>	<i>MPa = N mm⁻²</i>
<i>10⁻³m</i>	<i>10³kg</i>	<i>10³kg mm s⁻²</i>	<i>s</i>	<i>10³kg mm⁻³</i>	<i>10³kg mm⁻¹ s⁻²</i>
<i>10⁻³m</i>	<i>10³kg</i>	<i>kg m s⁻²</i>	<i>s</i>	<i>10¹²kg m⁻³</i>	<i>10⁶kg m⁻¹ s⁻²</i>
<i>mm</i>	<i>g</i>	<i>N</i>	<i>ms</i>	<i>g mm⁻³</i>	<i>MPa = N mm⁻²</i>
<i>10⁻³m</i>	<i>10⁻³kg</i>	<i>10³kg mm s⁻²</i>	<i>10⁻³s</i>	<i>10⁻³kg mm⁻³</i>	<i>10³kg mm⁻¹ s⁻²</i>
<i>10⁻³m</i>	<i>10⁻³kg</i>	<i>kg m s⁻²</i>	<i>10⁻³s</i>	<i>10⁶kg m⁻³</i>	<i>10⁶kg m⁻¹ s⁻²</i>
<i>μm</i>	<i>kg</i>	<i>μN</i>	<i>s</i>	<i>kg μm⁻³</i>	<i>MPa</i>
<i>10⁻⁶m</i>	<i>kg</i>	<i>10⁻⁶kg m s⁻²</i>	<i>s</i>	<i>kg μm⁻³</i>	<i>10⁻⁶ N μm⁻²</i>
<i>10⁻⁶m</i>	<i>kg</i>	<i>kg μm s⁻²</i>	<i>10⁻³s</i>	<i>10¹⁸kg m⁻³</i>	<i>N mm⁻²</i>
<i>μm</i>	<i>μg</i>	<i>nN</i>	<i>ms</i>	<i>μg μm⁻³</i>	<i>kPa</i>
<i>10⁻⁶m</i>	<i>10⁻⁹kg</i>	<i>10⁻⁹kg m s⁻²</i>	<i>10⁻³s</i>	<i>10⁻⁶g μm⁻³</i>	<i>10⁻⁹ N μm⁻²</i>
<i>10⁻⁶m</i>	<i>10⁻⁶g</i>	<i>g μm ms⁻²</i>	<i>10⁻³s</i>	<i>10⁹kg m⁻³</i>	<i>10³ N m⁻²</i>
<i>μm</i>	<i>μg</i>	<i>mN</i>	<i>μs</i>	<i>μg μm⁻³</i>	<i>GPa</i>
<i>10⁻⁶m</i>	<i>10⁻⁹kg</i>	<i>10⁻³kg m s⁻²</i>	<i>10⁻⁶s</i>	<i>10⁻⁶g μm⁻³</i>	<i>10⁻³ N μm⁻²</i>
<i>10⁻⁶m</i>	<i>10⁻⁶g</i>	<i>μg μm μs⁻²</i>	<i>10⁻⁶s</i>	<i>10⁹kg m⁻³</i>	<i>10⁹ N m⁻²</i>
μm	mg	μN	ms	mg μm⁻³	MPa
<i>10⁻⁶m</i>	<i>10⁻⁶kg</i>	<i>10⁻⁶kg m s⁻²</i>	<i>10⁻³s</i>	<i>10⁻³g μm⁻³</i>	<i>10⁻⁶ N μm⁻²</i>
<i>10⁻⁶m</i>	<i>10⁻³g</i>	<i>μg μm μs⁻²</i>	<i>10⁻³s</i>	<i>10¹²kg m⁻³</i>	<i>10⁶ N m⁻²</i>

<i>F</i>	=	<i>m</i>	<i>ÿ</i>	$\rho = \frac{m}{V}$	$P = \frac{F}{S}$
<i>kg m s⁻²</i>		<i>kg</i>	<i>m s⁻²</i>	<i>kg m⁻³</i>	<i>N m⁻²</i>
<i>N</i>	=	<i>tonne</i>	<i>mm s⁻²</i>	<i>tonne mm⁻³</i>	<i>N mm⁻²</i>
<i>kg m s⁻²</i>	=	<i>10³kg</i>	<i>10⁻³m s⁻²</i>	<i>10⁹kg m⁻³</i>	<i>10⁶N m⁻²</i>
<i>N</i>	=	<i>g</i>	<i>mm ms⁻²</i>	<i>g mm⁻³</i>	<i>N mm⁻²</i>
<i>kg m s⁻²</i>	=	<i>10⁻³kg</i>	<i>10⁻³m (10⁻³s)⁻²</i>	<i>10⁶kg m⁻³</i>	<i>10⁶N m⁻²</i>
<i>μN</i>	=	<i>kg</i>	<i>μm s⁻²</i>	<i>kg μm⁻³</i>	<i>μN μm⁻²</i>
<i>10⁻⁶kg m s⁻²</i>	=	<i>kg</i>	<i>10⁻⁶m s⁻²</i>	<i>10¹⁸kg m⁻³</i>	<i>10⁶N m⁻²</i>
<i>nN</i>	=	<i>μg</i>	<i>μm ms⁻²</i>	<i>μg μm⁻³</i>	<i>nN μm⁻²</i>
<i>10⁻⁹kg m s⁻²</i>	=	<i>10⁻⁹kg</i>	<i>10⁻⁶m (10⁻³s)⁻²</i>	<i>10⁹kg m⁻³</i>	<i>10³N m⁻²</i>
<i>mN</i>	=	<i>μg</i>	<i>μm μs⁻²</i>	<i>μg μm⁻³</i>	<i>mN μm⁻²</i>
<i>10⁻³kg m s⁻²</i>	=	<i>10⁻⁹kg</i>	<i>10⁻⁶m (10⁻³s)⁻²</i>	<i>10⁹kg m⁻³</i>	<i>10⁹N m⁻²</i>
μN	=	mg	μm ms⁻²	mg μm⁻³	μN μm⁻²
<i>10⁻⁶kg m s⁻²</i>	=	<i>10⁻⁶kg</i>	<i>10⁻⁶m (10⁻³s)⁻²</i>	<i>10¹²kg m⁻³</i>	<i>10⁶N m⁻²</i>

Tableau A.1 – Systèmes d'unités cohérents

Annexe B

Propriétés mécaniques de matériaux usuels

Matériaux (température si différente de 20 °C)	Module d'Young en 10 ⁹ Pascal	Coefficient de Poisson	Masse volumique en kg/l
Acier de construction	210	0,285	7,8
Acier à ressort	220	0,29	7,8
Acier inox 18-10 et 18-12	203	0,29	7,9
Acier inox 18-12 (600)	144	0,35	7,7
Invar	140	0,29	8,7
Fonte grise	90 à 120	0,29	7,1 à 7,2
Fonte malléable	170 à 190	0,17	7,2 à 7,4
Alliages pour disques de turbines aéronautiques TA6V	105	0,25	7,8
INCO 718 (600)	165	0,35	7,7
Alliages pour aubes de turbines aéronautiques IN 100	217	0,25	7,8
IN 100 (600)	181,5	0,35	7,7
IN 100 (1000)	115	0,42	7,6
MARM 509	200	0,25	8,1
MARM 509 (600)	160	0,35	7,95
MARM 509 (1000)	124	0,42	7,86
CMSX-2 (dir. cristallo. 001)	125	0,25	8,2
CMSX-2 (dir. cristallo. 001) (600)	104	0,35	8,5
CMSX-2 (dir. cristallo. 001) (1000)	81	0,42	7,6
Aluminium	71	0,34	2,6
Alliage 2618 (Concorde AU2GN)	75	0,33	2,7
Alliage 2024 (duralumin AU4GN)	72,5	2,7 à 2,8	
Alliage 7010 (pour trains d'atterrissage)	70		
Zinc	78	0,21	7,15
Cuivre	100	0,33	8,9
Béryllium	300	0,5	1,85
Bronze au béryllium	130	0,34	8,25
Titane	105	0,34	4,5
Granite	60	0,27	2,3 à 3
Marbre	26	0,3	2,8
Béton en compression	10 à 13	0,15	2 à 2,4
Verre	60	0,25	2,7
Plexiglass	2,9	0,4	1,8
Caoutchouc	0,2	0,5	1,8
Bois (Pin) (dir. cristallo. 001)	7	0,2	0,4

Tableau B.1 – Propriétés mécaniques de matériaux usuels

Annexe C

RdM - Sections usuelles

Annexe D

Capteurs à jauges extensométriques

Annexe E

Strain Transformation and Rosette Gage Theory