

Introduction à la résistance des matériaux

INSA Centre Val de Loire
Département Génie des Systèmes Industriels - 3e année - parcours spécifique

JEAN-MATHIEU MENCIK
jean-mathieu.mencik@insa-cvl.fr

Août 2015

Table des matières

1	Chargement uniaxial	3
1.1	Introduction	3
1.2	Lois de comportement	4
1.3	Equation de la déformée	4
1.4	Relation allongement-déplacement	5
1.5	Cylindre ouvert à paroi mince sous pression	6
1.6	Exercices	7
2	Diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants	8
2.1	Introduction	8
2.2	Détermination de l'effort tranchant et du moment fléchissant	8
2.3	Relations différentielles	11
2.4	Exercices	11
3	Contraintes dans les poutres en flexion	13
3.1	Introduction	13
3.2	Contrainte due à un moment fléchissant constant (flexion pure)	13
3.3	Contraintes dues à l'effort tranchant (flexion ordinaire)	15
3.4	Exercices	17
4	Déformée des poutres en flexion	19
4.1	Introduction	19
4.2	Equation de la déformée	19
4.3	Méthode de résolution (double intégration)	20
4.4	Exercices	21
5	Torsion des poutres à section circulaire	23
5.1	Introduction	23
5.2	Notion de distorsion angulaire et de contrainte de cisaillement	23
5.3	Equation de la déformée	24
5.4	Exercices	25

1 Chargement uniaxial

1.1 Introduction

Considérons une barre cylindrique, homogène, dont la longueur initiale et le diamètre initial sont respectivement notés l_0 et d_0 (la section initiale de la barre est donc $S_0 = \pi d_0^2/4$). Supposons cette barre soumise à une force longitudinale F à l'aide d'une machine de traction (cf. Figure).

Une fois le chargement appliqué, il apparaît une augmentation de longueur $l_0 \rightarrow l$ ainsi qu'un rétrécissement de diamètre $d_0 \rightarrow d$, donc de section ($S_0 \rightarrow S$). Cette constatation nous amène à introduire les concepts de *déformations longitudinale* ε_l et *transversale* ε_t , telles que :

$$\varepsilon_l = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\delta l}{l_0} \quad , \quad \varepsilon_t = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\delta d}{d_0}$$

Ces quantités représentent des variations relatives de longueurs. Elles sont *sans unité*. Dans le cas présent, $\varepsilon_l > 0$ alors que $\varepsilon_t < 0$: une déformation positive traduit un allongement ; une déformation négative traduit un raccourcissement.

De même, introduisons le concept de *contrainte axiale* (ou normale) σ , définie par :

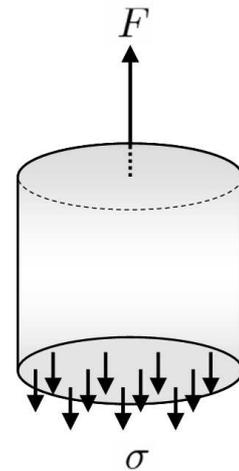
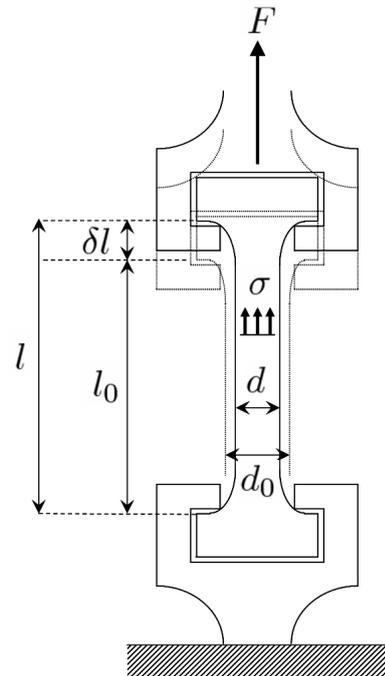
$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

Cette quantité traduit la composante normale d'une force surfacique [Pa]. Dans le cas présent, elle est supposée uniforme sur la section de la barre (c'est une conséquence du *Principe de Saint Venant*).

Principe de Saint Venant. Le principe de Saint-Venant précise que le comportement en un point quelconque d'une poutre (barre en traction mais pas seulement), pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'applications des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons ; ce qui compte, c'est alors uniquement le torseur induit par ces excitations en ce point, c'est-à-dire la résultante des forces et le moment.

Remarques.

- Une contrainte est un scalaire. Elle est relative à une surface donnée ; en particulier, la contrainte axiale σ représente la projection de la force surfacique (on la note \vec{T}), s'appliquant sur cette surface, sur la normale de cette surface (on la note \vec{n}). Il en résulte que $\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n}$.
- En toute rigueur, le calcul de la contrainte devrait s'effectuer par rapport à la section déformée S . Implicitement, nous admettons l'*hypothèse de petites perturbations (HPP)* selon laquelle les déplacements induits par les déformations sont négligeables par rapport aux dimensions du système d'origine. Dans ce sens, nous supposons que $S_0 \approx S$: il en résulte que $\sigma \approx F/S_0$. Dans la suite la section de la barre sera simplement notée S , peu importe si elle est déformée ou non.



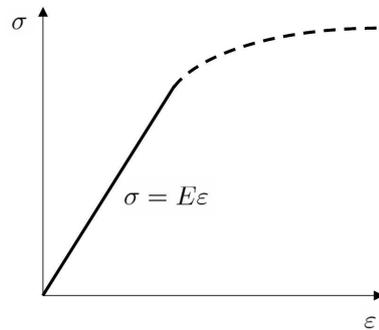
1.2 Lois de comportement

Dans le cadre de l'HPP (*rappel* : les déformations sont petites (inférieures au %)), deux observations peuvent être faites :

- La contrainte axiale est proportionnelle à la déformation longitudinale :

$$\sigma = E\varepsilon_l$$

Cet résultat, extrêmement important, est connu sous le nom de *Loi de Hooke*. C'est le fondement de l'élasticité linéaire (*note* : cette loi simplifiée est valable dans le cas d'un état de contraintes 1D; elle prend une tournure plus complexe dans le cas 3D). Dans cette équation, E représente le module d'Young du matériau [Pa]. Par exemple : $E = 210GPa$ pour un acier alors que $E = 70GPa$ pour un aluminium.



- La déformation transversale est proportionnelle à la déformation longitudinale :

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_l \quad \rightarrow \quad \varepsilon_t = -\frac{\nu}{E}\sigma$$

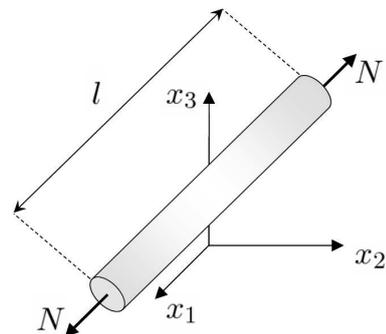
où ν représente le coefficient de Poisson (sans unité). Par exemple : pour un métal, $\nu \approx 0.3$.

1.3 Equation de la déformée

Reprenons les équations précédemment établies, gouvernant la description cinématique (i.e. en déformation) et mécanique (i.e. en contrainte) du système. Appliquons ces équations au niveau local sur l'axe de la barre, à l'abscisse $x_1 \in]0, l[$. Au niveau élémentaire, en opérant les substitutions $\Delta l \rightarrow du_1$ et $l_0 \rightarrow dx_1$ et en prenant en compte l'HPP $S_0 \approx S$, les équations locales sont :

$$\varepsilon_l = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad , \quad \sigma = \frac{N}{S} \quad x_1 \in]0, l[$$

où N représente l'effort de traction appliqué à la barre, décrivant l'intensité d'une force \vec{N} qui est *normale* à la section de la barre.



Remarque. L'effort de traction \vec{N} peut être différent de l'effort appliqué \vec{F} si celui-ci n'est pas colinéaire à l'axe de la barre : il s'agit alors de considérer une relation de la forme $N = F \cos \alpha$.

En introduisant la loi de Hooke, c'est-à-dire $\sigma = E\varepsilon_l$, l'équation de la déformée du système s'écrit alors :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{N}{ES} \quad x_1 \in]0, l[$$

Remarque. Cette équation demeure basée sur l'hypothèse d'uniformité du champ de contraintes sur la section de la barre (St Venant).

Par intégration de l'équation de la déformée, le déplacement axial u_1 de la barre s'écrit :

$$u_1 = \frac{N}{ES}x_1 + C \quad x_1 \in]0, l[$$

où la constante C s'obtient en considérant les conditions aux limites cinématiques du système.

L'allongement δl d'une barre de longueur l s'exprime alors $\delta l = u_1(l) - u_1(0)$, soit

$$\delta l = \frac{Nl}{ES} \quad (*)$$

Remarque. Ci-dessus, le terme ES/l joue le rôle d'une raideur (de traction) k_l , telle que $N = k_l\delta l$.

1.4 Relation allongement-déplacement

Dans le cas général, la barre n'est pas forcément alignée avec l'axe x_1 . Considérons donc une barre AB de longueur l , de section S , de module d'Young E , articulée sur un bâti rigide en A et faisant un angle α avec l'axe x_1 (cf. Figure). Notons u_1^B et u_2^B les déplacements du point B selon les axes x_1 et x_2 , respectivement. La longueur $l + \delta l$ de la barre déformée s'exprime alors :

$$(l + \delta l)^2 = (l\cos\alpha + u_1^B)^2 + (l\sin\alpha + u_2^B)^2$$

Dans le cadre des petits déplacements (HPP), l'allongement δl s'exprime alors :

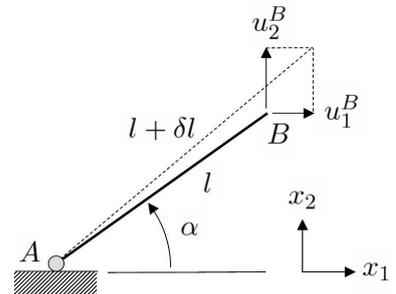
$$\delta l = u_1^B \cos\alpha + u_2^B \sin\alpha$$

L'effort de traction N de la barre s'exprime alors :

$$N = \frac{ES}{l}\delta l = \frac{ES}{l}(u_1^B \cos\alpha + u_2^B \sin\alpha) \quad (**)$$

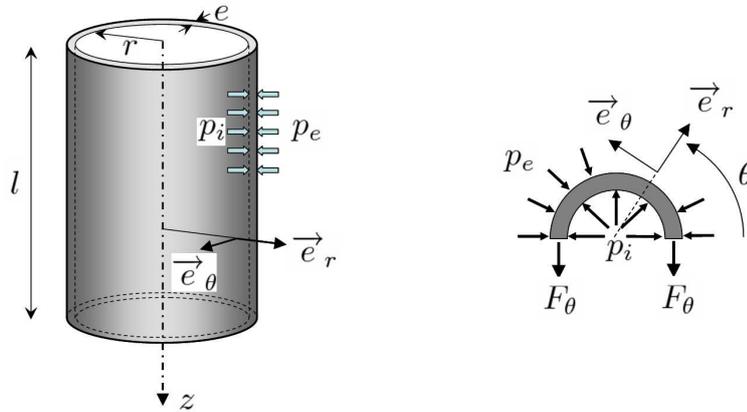
Conclusion. En résumé, deux approches peuvent être observées pour résoudre un problème de traction-compression :

- soit l'on connaît l'effort de traction (à partir de la force appliquée), et l'on détermine l'allongement δl à partir de l'équation (*);
- soit la détermination de l'effort de traction n'est pas possible, et l'on traite avec les déplacements : l'effort de traction N s'obtient alors à partir de l'équation (**).



1.5 Cylindre ouvert à paroi mince sous pression

Le cylindre droit à paroi mince, contenant un fluide sous pression, est une des applications intéressantes du chargement uniaxial. Nous supposons qu'il n'y a aucune contrainte selon l'axe du cylindre (hypothèse du cylindre infini). Nous étudions une portion de ce cylindre, de longueur l . Les caractéristiques du cylindre sont : module d'Young E , rayon r , épaisseur e . L'hypothèse de paroi mince stipule que $e \ll r$.



Considérons une partie du système global, définie par exemple pour la variation angulaire $\theta \in [0, \pi]$ (cf. Figure). La “force de traction” F_θ s’appliquant sur chaque tranche de cette partie (i.e. exercée par la partie complémentaire en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$) s’exprime alors :

$$F_\theta = (p_i - p_e)lr$$

Preuve.

La contrainte circonférentielle s’exprime $\sigma_{\theta\theta} = F_\theta/le$, soit :

$$\sigma_{\theta\theta} = (p_i - p_e)\frac{r}{e}$$

L’allongement circonférentiel s’exprime $\delta_\theta = \sigma_{\theta\theta}(2\pi r)/E$, soit :

$$\delta_\theta = (p_i - p_e)\frac{2\pi r^2}{eE},$$

alors que la variation de rayon s’exprime $\delta_r = \delta_\theta/(2\pi)$, soit :

$$\delta_r = (p_i - p_e)\frac{r^2}{eE},$$

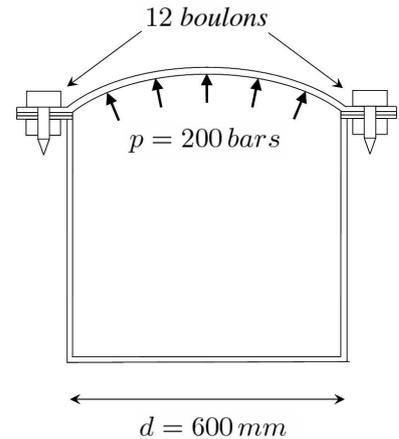
Preuve.

1.6 Exercices

Exercice 1

Une chaudière haute pression, dont la forme et les caractéristiques sont illustrées en Figure (*note* : l'épaisseur de la paroi est supposée faible devant le diamètre d), renferme de la vapeur d'eau sous la pression $p = 200 \text{ bars}$ (rappel : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$). Sa partie supérieure comporte un dôme, en forme de calotte sphérique, boulonné sur la partie cylindrique par 12 boulons régulièrement répartis sur l'anneau de jonction. Les boulons sont faits d'un acier de *limite élastique* 400 MPa . On se propose de dimensionner le diamètre des boulons :

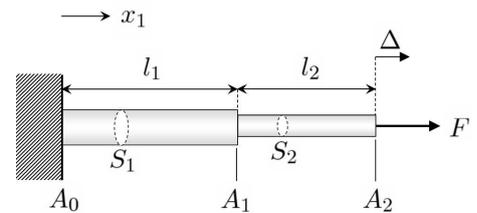
- Calculer la force totale agissant sur la calotte. On montrera notamment que la forme de la calotte n'intervient pas dans le calcul de cette force, et que seul le diamètre est nécessaire.
- En déduire le dimensionnement des boulons.



Exercice 2

Deux barres A_0A_1 et A_1A_2 , de longueurs respectives l_1 et l_2 , de sections respectives S_1 et S_2 et de même module d'Young E , sont soudées entre elles en A_1 . L'extrémité A_0 étant fixée à un bâti rigide, on applique en A_2 une force de traction d'intensité F .

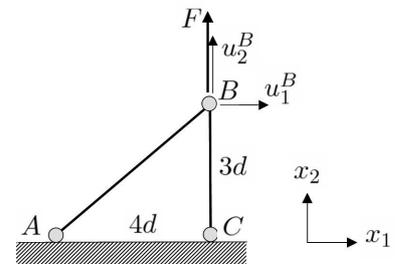
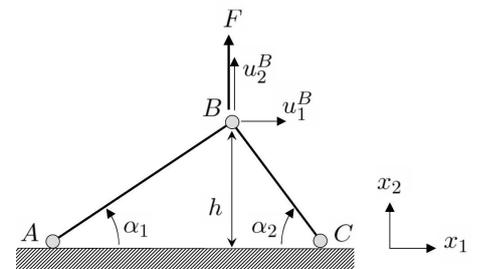
- Calculer l'allongement total du système.
- En déduire une loi de composition de "raideurs en série".



Exercice 3

Dans le plan (x_1, x_2) , on considère deux barres AB et CB (cf. première Figure), de sections respectives S_1 et S_2 et de même module d'Young E ; elles sont articulées en A et C au niveau d'un bâti rigide et articulées entre elles en B . Les barres 1 et 2 sont inclinées des angles respectifs α_1 et α_2 par rapport à l'axe x_1 . La hauteur du point B , par rapport au bâti, est h (les longueurs respectives des barres 1 et 2 sont alors $l_1 = h/\sin\alpha_1$ et $l_2 = h/\sin\alpha_2$). On impose au point B une force d'intensité F , parallèle à l'axe x_2 .

- A partir des déplacements u_1^B et u_2^B du point B , exprimer les efforts de tractions N_1 et N_2 dans les deux barres.
- Exprimer, en fonction de N_1 et N_2 , l'équilibre statique du système au point B .
- En déduire deux équations permettant de calculer u_1^B et u_2^B . Résoudre ces équations dans le cas de la deuxième Figure.
- Dans le cas de la deuxième Figure, calculer les contraintes axiales σ_1 et σ_2 dans les barres.

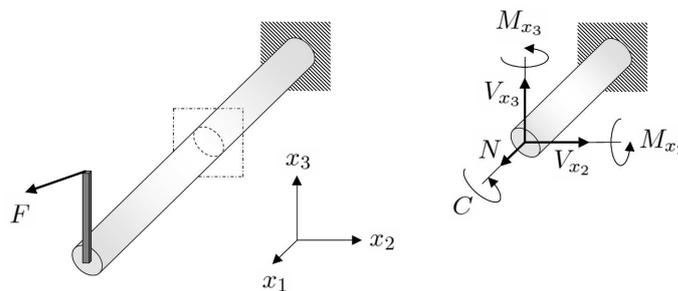


2 Diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants

2.1 Introduction

Une poutre est une membrure prismatique mince pouvant être soumise à différents types de chargements, soit ponctuellement, soit sur une partie de sa longueur. Ces chargements entraînent des forces et moments internes en toute section de la poutre (cf. Figure ci-dessous). Ceux-ci peuvent être décomposés dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) sur la base de trois composantes, respectivement (N, V_{x_2}, V_{x_3}) et (C, M_{x_2}, M_{x_3}) , avec :

- N l'effort de *traction*, déjà été étudié dans le chapitre précédent ;
- C le couple de *torsion* ;
- $\{V_{x_i}\}_i$ et $\{M_{x_i}\}_i$ les *efforts tranchants* et *moments fléchissants*, induisant la *flexion* de la poutre selon les deux plans suivants (cf. Figure) :
 - Plan (x_1, x_2) : l'effort tranchant et moment fléchissant associés sont alors V_{x_2} et M_{x_2} ;
 - Plan (x_1, x_3) : l'effort tranchant et moment fléchissant associés sont alors V_{x_3} et M_{x_3} .



Hypothèse. Les axes x_2 et x_3 représentent deux axes de symétrie de la section ; aussi, les forces et moments s'appliquent selon ces axes (notons que dans le cadre de cette hypothèse, les effets de torsion de la section sont exclus).

Dans le cadre de ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des forces et moments associés à la *flexion dans un plan particulier*, soit par exemple (x_1, x_2) . Pour simplifier les écritures, nous noterons alors V l'effort tranchant V_{x_2} et M le moment fléchissant M_{x_2} . Le but de ce chapitre est de décrire l'effort tranchant V et le moment fléchissant M en chaque section de la poutre (i.e. pour chaque abscisse x_1), afin notamment de déterminer les zones critiques où ces composantes sont maximales.

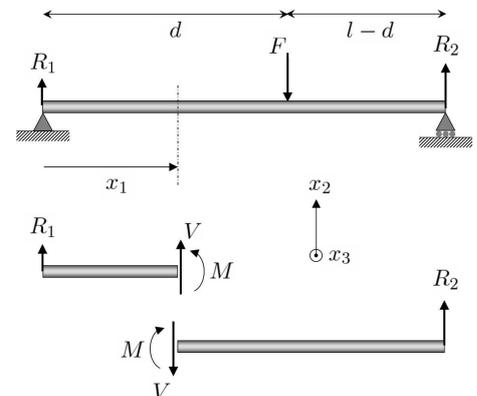
2.2 Détermination de l'effort tranchant et du moment fléchissant

Convention de signe

Par convention, nous dirons qu'une face (ou section) est positive lorsque sa normale externe pointe dans le sens positif de l'axe x_1 . Elle est négative dans le cas contraire. De même, par convention :

- Pour une face positive : l'effort tranchant V et le moment fléchissant M seront représentés et comptabilisés positivement lorsqu'ils agissent dans le *sens positif* des axes x_2 (pour V) et x_3 (pour M).
- Pour une face négative : l'effort tranchant V et le moment fléchissant M seront représentés et comptabilisés positivement lorsqu'ils agissent dans le *sens négatif* des axes x_2 (pour V) et x_3 (pour M).

La Figure ci-contre illustre ce choix de convention.



Diagrammes

Notons l la longueur de la poutre. Notons également $\{F_i\}_i$ un ensemble de forces ponctuelles appliquées le long de la poutre aux abscisses respectives $\{x_1^{F_i}\}_i$ et dont les sens d'applications sont précisés à partir de flèches (cf. Figure précédente). Avant d'aborder le calcul de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M , il est nécessaire d'évaluer les efforts de réactions (aux appuis notamment) notés $\{R_j\}_j$ pour les forces et $\{M_k\}_k$ pour les moments (s'il y en a; attention : ne pas confondre ces moments de réactions avec le moment fléchissant M défini en tout point x_1 et noté également $M(x_1)$). La stratégie pour obtenir ces efforts de réactions consiste à appliquer les équations d'équilibre au système global :

$$\sum_i F_i^+ + \sum_j R_j^+ = 0,$$

$$\sum_i F_i^+(x_1^{F_i} - x_1^P) + \sum_j R_j^+(x_1^{R_j} - x_1^P) + \sum_k M_k^+ = 0 \quad (*)$$

où l'indice "+" signifie que les forces et moments doivent être comptabilisés positivement par rapport au système d'axes considérés : axe x_2 pour les forces et axe x_3 pour les moments (notons que le choix des systèmes $(-x_2, -x_3)$, $(x_2, -x_3)$ ou $(-x_2, x_3)$ aurait été tout à fait légitime également). Soulignons que le calcul des moments s'effectue par rapport à un point P arbitraire, matérialisant une section positionnée à l'abscisse x_1^P (le choix de cette abscisse est arbitraire; il peut s'effectuer de sorte à simplifier "au maximum" les équations à résoudre : $x_1^P = 0$ ou $x_1^P = l$ peuvent par exemple s'avérer être un choix légitime visant à exclure une partie des forces de réactions dans le calcul des moments).

La stratégie pour obtenir l'effort tranchant V et le moment fléchissant M , à une position arbitraire x_1 le long de la poutre, consiste à considérer un tronçon "gauche" $[0, x_1]$ (cf. Figure ci-dessus), puis à étudier les *équations d'équilibre* de ce tronçon lorsque x_1 varie de 0 à l (note : ces équations d'équilibre pourraient légitimement être appliquées à un tronçon "droit" $[x_1, l]$, les valeurs résultantes de V et M demeurant les mêmes au final). On obtient alors :

$$V(x_1) + \sum_i F_i^+ + \sum_j R_j^+ = 0,$$

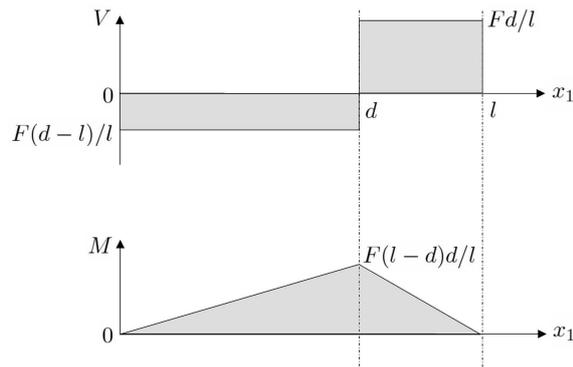
$$M(x_1) + V(x_1)(x_1 - x_1^P) + \sum_i F_i^+(x_1^{F_i} - x_1^P) + \sum_j R_j^+(x_1^{R_j} - x_1^P) + \sum_k M_k^+ = 0 \quad (**)$$

où les forces $\{F_i\}_i$, ainsi que les efforts de réactions $\{R_j\}_j$ et $\{M_k\}_k$, *doivent être comptabilisés au niveau du tronçon $[0, x_1]$ uniquement (c'est-à-dire, en omettant ce qui se passe sur la zone $]x_1, l]$).*

En résumé, la stratégie de calcul de l'effort tranchant $V(x_1)$ et du moment fléchissant $M(x_1)$ s'expose de la manière suivante :

- Appliquer les équations d'équilibre (*) au système global : trouver les efforts de réactions (forces et moments éventuels).
- Appliquer les équations d'équilibre (**) à un tronçon gauche de poutre $[0, x_1]$ pour x_1 variant de 0 à l : trouver l'effort tranchant $V(x_1)$ et le moment fléchissant $M(x_1)$.

Application :

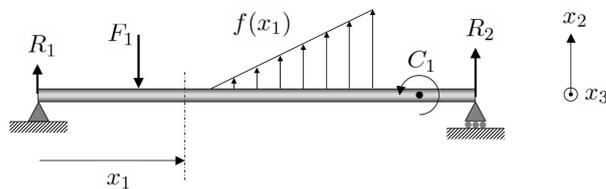


Charges réparties et couples ponctuels

La stratégie de calcul de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M reste inchangée lorsque la poutre est soumise à une densité linéique de forces $f(x_1)$ ou soumise à un ensemble de couples ponctuels $\{C_i\}_i$. Les équations d'équilibre, appliquées à un tronçon gauche $[0, x_1]$, sont alors de la forme :

$$V(x_1) + \sum_i F_i^+ + \sum_j R_j^+ + \sum_r \int_{a_r}^{b_r} f_r^+(u) du = 0$$

$$M(x_1) + V(x_1)(x_1 - x_1^P) + \sum_i F_i^+(x_1^{F_i} - x_1^P) + \sum_j R_j^+(x_1^{R_j} - x_1^P) + \sum_k M_k^+ + \sum_r \int_{a_r}^{b_r} f_r^+(u)(u - x_1^P) du + \sum_s C_s^+ = 0$$

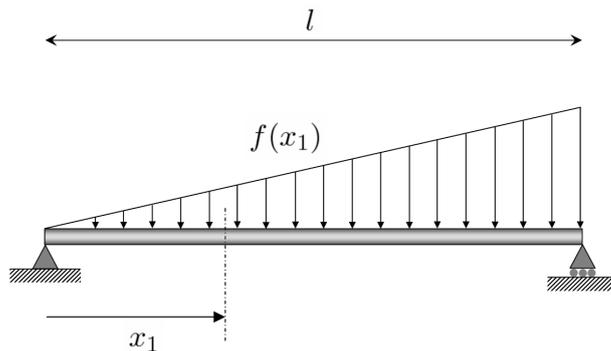


Notons que pour obtenir les efforts de réactions, il suffit de considérer ces équations lorsque $x_1 = l$, $V(l)$ et $M(l)$ désignant alors les efforts de réactions en $x_1 = l$.

Application :

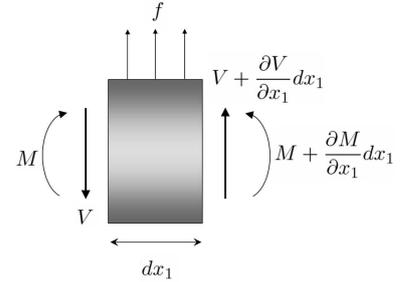
Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant pour le système illustré ci-dessous, représentant une poutre en appui simple (définie pour $x_1 \in [0, l]$) soumise à une densité linéique de forces $f(x_1)$ telle que :

$$f^+(x_1) = -g \frac{x_1}{l} \quad x_1 \in [0, l]$$



2.3 Relations différentielles

Considérons une poutre soumise aux effets d'une charge linéique $f(x_1)$ et, éventuellement, de forces et de couples concentrés $\{F_i\}_i$ et $\{C_i\}_i$, de points d'application respectifs $\{x_{F_i}\}_i$ et $\{x_{C_i}\}_i$. En dehors de ces points d'application, c'est-à-dire sur le domaine $\mathcal{D} =]0, l[\setminus \{\{x_{F_i}\}_i \cup \{x_{C_i}\}_i\} = \cup_i \mathcal{D}_i$, l'équilibre en forces et moments d'un élément de poutre de longueur infinitésimale dx_1 se formule :



$$\begin{cases} \partial V(x_1)/\partial x_1 = -f^+(x_1) & x_1 \in \mathcal{D}_i \quad \forall i \\ \partial M(x_1)/\partial x_1 = -V(x_1) & x_1 \in \mathcal{D}_i \quad \forall i \end{cases}$$

Preuve.

Conséquence. Les maxima locaux du moment fléchissant représentent les points où l'effort tranchant est nul. Ce résultat important permet notamment de vérifier la cohérence des diagrammes, les zones d'effort tranchant nul devant correspondre aux maxima du moment fléchissant et *vice versa*.

Remarque. Ces équations permettent de tracer les diagrammes de V et M de façon systématique, en observant les relations suivantes

$$\begin{cases} V(x_1) - V(a) = - \int_a^{x_1} f^+(u) du & \forall (a, x_1) : [a, x_1] \in \mathcal{D}_i \quad \forall i \\ M(x_1) - M(a) = - \int_a^{x_1} V(u) du & \forall (a, x_1) : [a, x_1] \in \mathcal{D}_i \quad \forall i \end{cases}$$

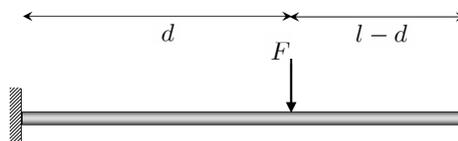
Cela signifie :

- que la variation de l'effort tranchant entre deux sections de poutre est égale à l'aire engendrée par la densité de forces $f^+(x_1)$, à la condition qu'il n'y ait pas de source d'excitation localisée entre ces deux sections.
- que la variation du moment fléchissant entre deux sections de poutre est égale à l'aire engendrée par l'effort tranchant $V(x_1)$, à la condition qu'il n'y ait pas de source d'excitation localisée entre ces deux sections.

2.4 Exercices

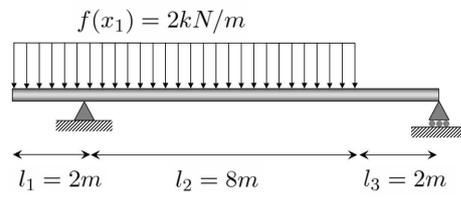
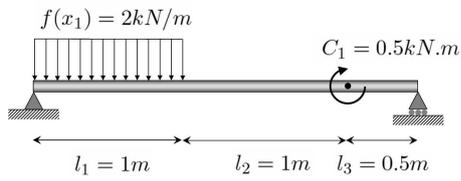
Exercice 1

- Construire les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant pour la poutre encastree-libre illustrée ci-dessous.



Exercice 2

- Pour les deux poutres illustrées ci-dessous, construire les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.
- Indiquer sur ces diagrammes les valeurs importantes.
- calculer numériquement, pour chaque cas, la valeur maximale du moment fléchissant.



3 Contraintes dans les poutres en flexion

3.1 Introduction

Nous nous sommes précédemment intéressés à la détermination de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M survenant dans une poutre soumise à de la flexion. Sur la base de ces forces et moments internes, nous nous consacrerons dans ce chapitre à la représentation des contraintes sur chaque section du système. Nous verrons par la suite (cf. chapitre suivant) comment aborder la déformée de la poutre, à partir de ces champs de contraintes de section notamment.

Dans le cadre de cette étude, les hypothèses suivantes seront admises :

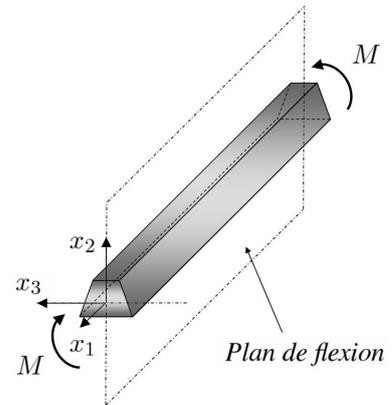
- La poutre est droite avant le chargement ;
- Le matériau constituant la poutre est homogène ;
- La section de la poutre possède un axe de symétrie (axe x_2 par exemple) et le chargement s'effectue dans le plan de symétrie résultant (x_1, x_2) (x_1 désignant l'axe de la poutre). On parlera alors de *flexion plane*, le plan de flexion étant ici (x_1, x_2) .

Notons à nouveau (cf. chapitre précédent) que dans le cadre de ces hypothèses, les effets de torsion de la poutre n'interviennent pas dans la description cinématique du système.

Remarque. Par convention, la section de la poutre (notée S) est paramétrée à partir des axes x_2 et x_3 , l'axe x_2 étant considéré comme axe de symétrie (voir ci-dessus). De même, l'intersection des axes x_2 et x_3 est considéré comme le *centroïde* de la section, c'est-à-dire son barycentre. Ce paramétrage impose que :

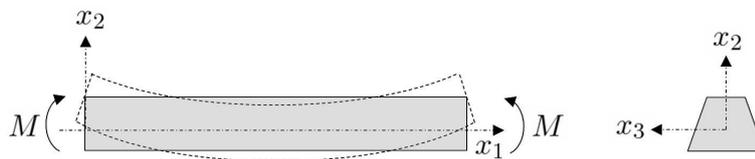
$$\int_S x_2 ds = 0 \quad , \quad \int_S x_3 ds = 0 \quad , \quad \int_S x_2 x_3 ds = 0$$

La résolution de ces équations permet d'ailleurs de positionner le centroïde de la section.



3.2 Contrainte due à un moment fléchissant constant (flexion pure)

Etudions le comportement d'une poutre droite soumise au même moment M , ce moment s'appliquant de "manière opposée" aux niveaux des extrémités du système. Sous l'effet de ce moment, les fibres supérieures (situées dans la région $x_2 > 0$) se contractent tandis que les fibres inférieures (situées dans la région $x_2 < 0$) s'allongent si M est positif, ou *vice versa* si M est négatif.



Dans le cadre du Principe de Saint Venant ("une condition aux limites mécanique peut être remplacée par un chargement équivalent sans modifier notablement le problème"), nous supposons que ce moment est équivalent à un champ de contraintes unidimensionnel σ_{11} orienté selon l'axe longitudinal x_1 (rigoureusement, σ_{11} représente un champ de forces surfaciques supporté par la section de normale \vec{e}_1 et orienté selon cette même normale \vec{e}_1). Nous admettrons également que σ_{11} suit une distribution linéaire sur la section S , c'est-à-dire que :

$$\sigma_{11} = ax_2 + bx_3 + c \quad \text{sur } S$$

Les constatations suivantes permettent d'identifier les inconnues a , b et c :

- L'effort de traction N (selon x_1) est nul, soit :

$$N = \int_S \sigma_{11} ds = 0 \quad \Rightarrow \quad a \int_S x_2 ds + b \int_S x_3 ds + c \int_S ds = 0$$

Les deux premières intégrales sont nulles en vertu du paramétrage de la section (cf. les équations du centroïde) : le fait que $N = 0$ impose donc nécessairement que $c = 0$.

En conclusion, $N = 0 \Rightarrow \sigma_{11} = ax_2 + bx_3$.

- Le moment M_{x_2} (autour de x_2) est nul, soit

$$M_{x_2} = \int_S \sigma_{11} x_3 ds = 0 \quad \Rightarrow \quad a \int_S x_2 x_3 ds + b \int_S x_3^2 ds = 0$$

La première intégrale est nulle en vertu du paramétrage de la section : le fait que $M_{x_2} = 0$ impose donc nécessairement que $b = 0$.

En conclusion, $M_{x_2} = 0 \Rightarrow \sigma_{11} = ax_2$.

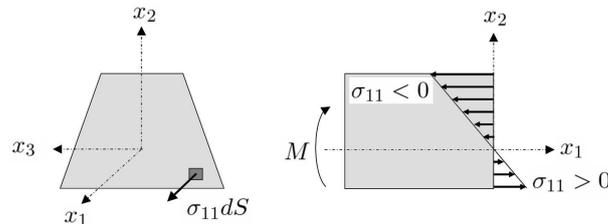
- Le moment M_{x_3} (autour de x_3) vaut M , soit

$$M_{x_3} = - \int_S \sigma_{11} x_2 ds = M \quad \Rightarrow \quad -a \int_S x_2^2 ds = M$$

En introduisant le *moment d'inertie* $I = \int_S x_2^2 ds$, on obtient finalement que $a = -M/I$.

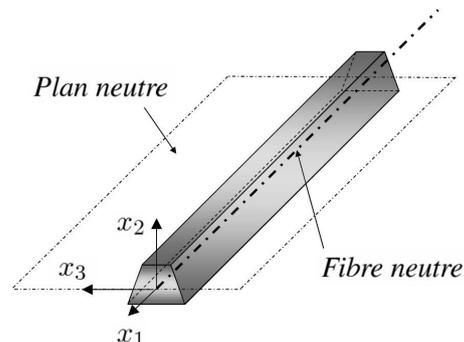
En résumé, la contrainte axiale σ_{11} s'exprime sur chaque section de la poutre par :

$$\sigma_{11} = -\frac{M}{I} x_2 \quad \text{sur } S \quad \text{où} \quad I = \int_S x_2^2 ds$$



La Figure ci-dessus illustre cette répartition de contrainte axiale σ_{11} au niveau d'une section, dans le cas d'un moment fléchissant M positif. La contrainte varie de façon linéaire, d'une compression maximale $\sigma_{11} < 0$ (au niveau des fibres supérieures) à une extension maximale $\sigma_{11} > 0$ (au niveau des fibres inférieures), en passant par zéro au niveau du centroïde.

Définitions. On appelle *plan neutre* le lieu des points de la poutre où $\sigma_{11} = 0$: c'est le plan (x_1, x_3) dans le cas présent. De même, la *fibre neutre* représente l'intersection entre le plan neutre et le plan où la flexion est étudiée : c'est l'axe x_1 dans le cas présent mais également le lieu des centroïdes des sections. Notons que l'axe x_3 matérialise le lieu des points de la section où $\sigma_{11} = 0$.



Remarque. Pour une section donnée, la valeur maximale de la contrainte σ_{11} , en termes de valeur absolue, s'obtient de la manière suivante :

$$\max|\sigma_{11}| = \frac{|M|}{I} \max|x_2|$$

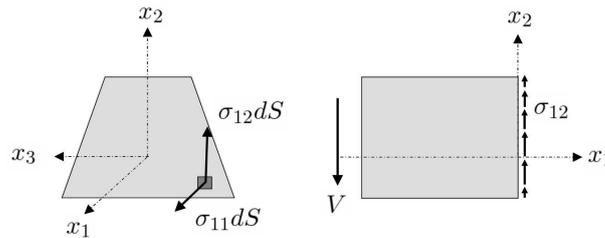
3.3 Contraintes dues à l'effort tranchant (flexion ordinaire)

Cadre général

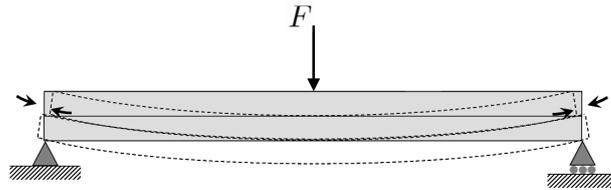
Nous abordons l'étude des contraintes dans une poutre soumise à des forces transversales. Les contraintes en présence sont la contrainte axiale σ_{11} (cf. précédente section) et une contrainte additionnelle σ_{12} induite par l'effort tranchant, appelée *contrainte de cisaillement* (rigoureusement, σ_{12} représente un champ de forces surfaciques supporté par la section de normale \vec{e}_1 et orienté selon la normale \vec{e}_2).

Sur la base de la précédente analyse (cas de la flexion pure), nous admettrons que la contrainte axiale σ_{11} suit une répartition linéaire dans la section, s'exprimant alors :

$$\sigma_{11} = -\frac{M}{I}x_2 \quad \text{sur } S$$



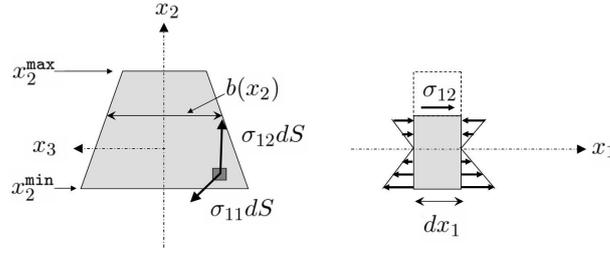
Il reste donc à décrire la contrainte de cisaillement σ_{12} . Cette dernière est induite par l'effort tranchant ; elle “permet” de maintenir la cohésion entre les différentes fibres de la poutre lors du chargement (en d'autres termes, sans contrainte de cisaillement, ces fibres se désolidariseraient (cf. Figure)).



Nous admettrons que σ_{12} dépend de l'ordonnée x_2 (en d'autres termes, elle n'est pas uniforme sur la section ; elle ne dépend pas de x_3 cependant). En observant l'équilibre des forces appliquées à un élément de poutre de longueur infinitésimale dx_1 (cf. Figure), la relation entre σ_{12} et l'effort tranchant V s'exprime de la manière suivante :

$$\int_S \sigma_{12}(x_2) ds = V$$

Pour déterminer σ_{12} , nous nous baserons sur l'approche de *Jourawski* consistant à décrire l'équilibre d'un tronçon de poutre de longueur dx_1 et de hauteur $x_2 - x_2^{\min}$ ($x_2 \in [x_2^{\min}, x_2^{\max}]$) :



En notant $b(x_2)$ la largeur de la section à l'ordonnée x_2 , l'équilibre des forces se formule alors :

$$\sigma_{12}(x_2)b(x_2)dx_1 + \int_{x_2^{\min}}^{x_2} \sigma_{11}(x_1 + dx_1, y)ds - \int_{x_2^{\min}}^{x_2} \sigma_{11}(x_1, y)ds = 0$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\sigma_{12}(x_2) = \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{1}{Ib(x_2)} \int_{x_2^{\min}}^{x_2} yds$$

soit, en observant la relation entre moment fléchissant et effort tranchant :

$$\sigma_{12}(x_2) = -\frac{V}{Ib(x_2)} \int_{x_2^{\min}}^{x_2} yds$$

Cette dernière équation peut également s'écrire :

$$\sigma_{12}(x_2) = -\frac{V}{Ib(x_2)} S_{x_2} y_{S_{x_2}}$$

où $S_{x_2} = \int_{x_2^{\min}}^{x_2} ds$ représente la partie de S comprise entre $y = x_2^{\min}$ et $y = x_2$; $y_{S_{x_2}}$ représente la distance entre le centroïde de S_{x_2} et le centroïde de S ($x_2 = 0$).

Remarque importante. Admettons que S_{x_2} soit partitionnée en sections élémentaires, i.e. $S_{x_2} = \cup_i S_{x_2}^i$. On obtient alors :

$$\sigma_{12}(x_2) = -\frac{V}{Ib(x_2)} \sum_i S_{x_2}^i y_{S_{x_2}}^i$$

où $y_{S_{x_2}}^i$ représente la distance entre le centroïde de chaque section $S_{x_2}^i$ et le centroïde de S ($x_2 = 0$). En d'autres termes, connaissant les centroïdes de ces sections élémentaires, la contrainte de cisaillement peut être obtenue simplement à partir de cette dernière équation.

Illustration.

Cas des sections rectangulaires

Considérons une poutre de section rectangulaire : $b(x_2) = b$ et $x_2^{\max} = -x_2^{\min} = h/2$. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\sigma_{12}(x_2) = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)$$

Preuve.

Cas des sections circulaires pleines

Considérons une poutre de section circulaire pleine, de rayon r . Dans ce cas, la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\sigma_{12}(x_2) = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi r^4} (r^2 - x_2^2)$$

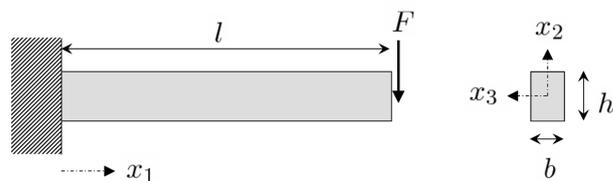
Preuve.

3.4 Exercices

Exercice 1

Une poutre encastrée est soumise sur son extrémité libre à une force verticale descendante d'intensité $F = 200N$. Les caractéristiques du système sont : longueur de la poutre $l = 1.5m$; dimensions de la section $b \times h = 20mm \times 50mm$.

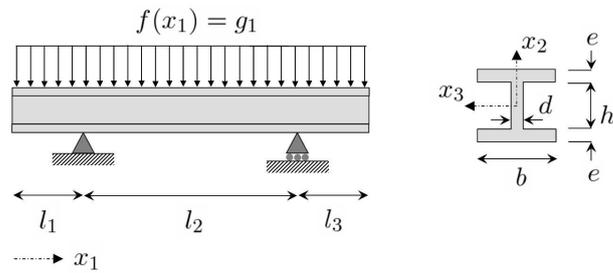
- Déterminer et calculer la valeur extrême $\max|\sigma_{11}|$ de la contrainte axiale dans cette poutre.
- Déterminer et calculer la valeur extrême $\max|\sigma_{12}|$ de la contrainte de cisaillement dans cette poutre.



Exercice 2

Une poutre en I est soumise sur toute sa longueur à une charge répartie d'intensité $g_1 = 40kN/m$. Les caractéristiques du système sont : moment d'inertie de la section globale $I = 22.2 \times 10^6 mm^4$; dimensions de la semelle $b \times e = 154mm \times 11.6mm$; dimensions de l'âme $d \times h = 8.1mm \times 138.8mm$; $l_1 = l_3 = 1m$; $l_2 = 3m$.

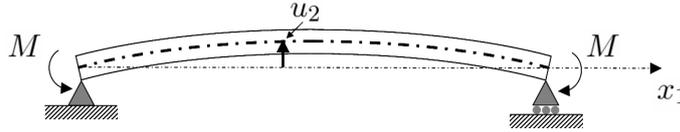
- Tracer les diagrammes de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M . En déduire les “zones critiques” de la poutre.
- Déterminer la répartition de la contrainte axiale σ_{11} dans la section de la poutre; déterminer $\max|\sigma_{11}|$.
- Déterminer la répartition de la contrainte de cisaillement σ_{12} dans l'âme.
- Proposer une méthode pour déterminer la répartition de la contrainte de cisaillement σ_{13} (i.e. la contrainte supportée par la section de normale \vec{e}_1 et orientée selon \vec{e}_3) dans la semelle.



4 Déformée des poutres en flexion

4.1 Introduction

Lorsqu'une poutre est soumise à un chargement (moment, force) qui provoque une flexion, par exemple dans le plan (x_1, x_2) , sa fibre neutre (i.e. son axe longitudinal) se déplace par rapport à sa position d'équilibre selon l'axe $x_2 = 0$. Ce déplacement, appelé *flèche* et noté u_2 , varie en intensité tout le long de la poutre. Il est fonction de la rigidité de la poutre mais aussi des conditions aux limites. La stratégie de calcul de cette flèche est proposée dans le cadre de ce chapitre.



4.2 Equation de la déformée

Hypothèses. Dans le cadre de l'HPP, les hypothèses suivantes seront adoptées :

- *Hypothèse de Navier* : les sections restent planes lors du chargement ;
- *Hypothèse de Bernoulli* : les sections restent perpendiculaires par rapport à la fibre neutre.

L'hypothèse de Navier permet de représenter le mouvement global de la section à partir du déplacement et de la rotation de cette dernière au niveau de son centroïde, uniquement. La deuxième hypothèse permet de relier la rotation de la section à la pente que fait la fibre neutre déformée par rapport à la position où la fibre est non déformée (axe x_1).

Nous supposons également que les seules contraintes en présence sont la contrainte axiale σ_{11} et la contrainte de cisaillement σ_{12} (cf. chapitre précédent).

Sur la base de ces hypothèses, la variation d'inclinaison de sections (notée $d\varphi$), entre les faces x_1 et $x_1 + dx_1$ d'un volume élémentaire de poutre, représente la variation de pente de la fibre neutre (cf. Figure). Dans le cadre de l'HPP, cette pente s'exprime $\partial u_2 / \partial x_1$; on obtient alors :

$$d\varphi = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} dx_1$$

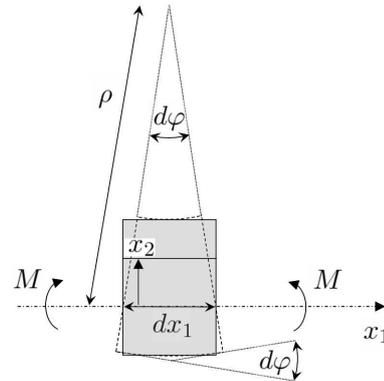
Introduisons également le *rayon de courbure* de la fibre neutre, noté ρ , tel que $\rho d\varphi \approx dx_1$. On a alors :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}$$

Notons par ailleurs ε_{11} la déformation axiale (telle que celle introduite dans le cadre du chapitre sur le chargement uniaxial), telle que $\varepsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$. On obtient alors :

$$\varepsilon_{11} = -\frac{x_2}{\rho}$$

Preuve.



D'après la loi de Hooke : $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ (cette loi simplifiée est valable dans le cas présent où $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$), la contrainte axiale s'exprime alors :

$$\sigma_{11} = -Ex_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}$$

En introduisant finalement la relation contrainte / moment fléchissant : $\sigma_{11} = -Mx_2/I$, établie dans le chapitre précédent, nous obtenons l'équation de la déformée de la poutre :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{M}{EI} \quad x_1 \in \mathcal{D} \quad (*)}$$

où EI représente la rigidité de flexion (note : elle est supposée indépendante de x_1).

Remarque 1. Nous admettons que l'équation de la déformée (*) est définie localement sur un ensemble de domaines ouverts $\{\mathcal{D}_i\}_i$ sur lesquels l'effort tranchant V et le moment fléchissant M sont supposés *continus*. En d'autres termes, cette équation n'a pas de validité au niveau des points d'application des forces et des couples ponctuels, c'est-à-dire lorsque l'effort tranchant et le moment fléchissant présentent des discontinuités.

Remarque 2. Cette approche requiert une étude préliminaire du moment fléchissant de la poutre.

4.3 Méthode de résolution (double intégration)

Cadre général

Rappelons que pour résoudre l'équation de la déformée (*), il est nécessaire de considérer un ensemble de domaines ouverts $\{\mathcal{D}_i\}_i$, appelés zones, sur lesquels l'effort tranchant V et le moment fléchissant M sont supposés continus. Sur chaque zone \mathcal{D}_i , la solution générale de l'équation de la déformée (*) s'exprime par :

$$\boxed{u_2(x_1) = \frac{1}{EI} \left[\iint (M(x_1) dx_1) dx_1 + A_i x_1 + B_i \right] \quad x_1 \in \mathcal{D}_i \quad i = 1, \dots, N}$$

où N représente le nombre de zones considérées le long de la poutre. En outre, la pente φ s'exprime par $\varphi = \partial u_2 / \partial x_1$, soit :

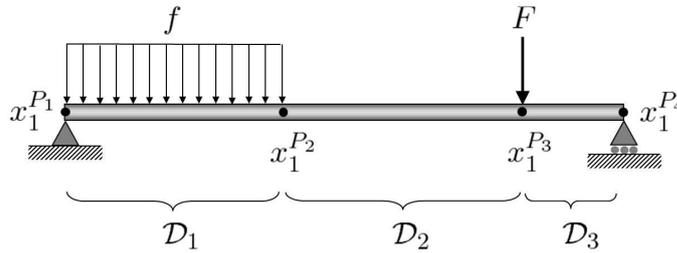
$$\boxed{\varphi(x_1) = \frac{\partial u_2(x_1)}{\partial x_1} = \frac{1}{EI} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\iint (M(x_1) dx_1) dx_1 \right) + A_i \right] \quad x_1 \in \mathcal{D}_i \quad i = 1, \dots, N}$$

Les constantes $\{A_i\}_i$ et $\{B_i\}_i$, dont le nombre est relatif à celui de zones $\{\mathcal{D}_i\}_i$ considérées le long de la poutre (c'est-à-dire N), sont les inconnues du problème devant être déterminées. Leur identification requiert l'étude des conditions aux limites du système, en déplacement et en pente. A titre d'exemple, connaissant la pente et le déplacement pour deux positions respectives x_1^P et x_1^Q sur une zone \mathcal{D}_i donnée, les constantes A_i et B_i s'obtiennent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi(x_1^P) \text{ connu}} : & \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\iint (M dx_1) dx_1 \right]_{x_1=x_1^P} + A_i = EI\varphi(x_1^P) \quad \Rightarrow \quad A_i \\ \underline{u_2(x_1^Q) \text{ connu}} : & \quad \left[\iint (M dx_1) dx_1 \right]_{x_1=x_1^Q} + A_i x_1^Q + B_i = EIu_2(x_1^Q) \quad \Rightarrow \quad B_i \end{aligned}$$

Traitement des singularités : formulation du problème global

La solution de l'équation de la déformée (*) reste valable sur des domaines ouverts $\{\mathcal{D}_i\}_i$ sur lesquels l'effort tranchant et le moment fléchissant sont continus.



Ce partitionnement impose de formuler la solution u_2 sur chaque zone \mathcal{D}_i , les constantes $\{A_i\}_i$ et $\{B_i\}_i$ étant priori différentes de zone en zone. Le nombre de constantes $\{A_i\}_i$, de même que celui de constantes $\{B_i\}_i$, est égal au nombre de zones N mis en jeu. Ces inconnues sont à déterminer à partir des conditions aux limites du système global (par exemple, en considérant que le déplacement est nul pour une condition d'encastrement ou d'appui simple), mais aussi à partir des conditions de couplage entre zones. Ces conditions reviennent à considérer la continuité de la pente φ et du déplacement u_2 (si ce n'était pas le cas, le système se romprait). La stratégie pour déterminer les inconnues $\{A_i\}_i$ et $\{B_i\}_i$ sur la base des conditions de couplage (au niveau de positions $\{x_1^{P_i}\}_i$ représentant les points de jonction entre zones) s'exprime de la manière suivante :

- Continuité de la pente :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\iint (M dx_1) dx_1 \right]_{x_1=(x_1^{P_i})^-} + A_{i-1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\iint (M dx_1) dx_1 \right]_{x_1=(x_1^{P_i})^+} + A_i$$

$$i = 2, \dots, N$$

- Continuité du déplacement :

$$\left[\iint (M dx_1) dx_1 \right]_{x_1=(x_1^{P_i})^-} + A_{i-1}x_1^{P_i} + B_{i-1} = \left[\iint (M dx_1) dx_1 \right]_{x_1=(x_1^{P_i})^+} + A_i x_1^{P_i} + B_i$$

$$i = 2, \dots, N$$

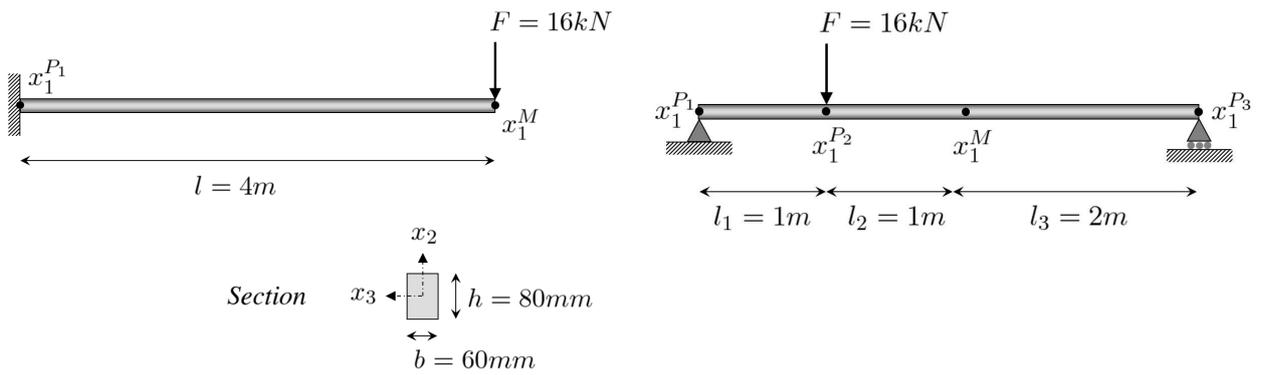
Cela revient à considérer $N - 1$ équations pour la pente et $N - 1$ équations pour le déplacement. En complétant ces équations avec deux équations exprimant les conditions aux limites du système global (encastrement, appui simple, ...), on obtient un système de $2N$ équations dont la résolution fournit $\{A_i\}_i$ et $\{B_i\}_i$.

4.4 Exercices

Exercice 1

On considère une poutre encastree et une poutre sur appui simple, soumise toutes deux à une force concentrée F (cf. Figure). Les caractéristiques matérielles et géométriques des deux structures sont similaires, leur module d'Young étant $E = 200GPa$.

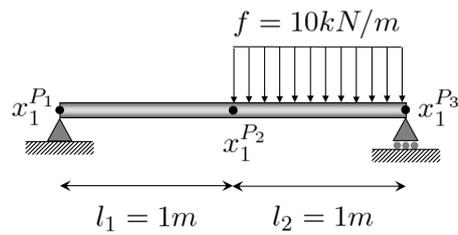
- Calculer, à partir des caractéristiques de la section des deux poutres (cf. Figure), le moment d'inertie I .
- Déterminer et calculer, pour les deux poutres, la flèche au point x_1^M .



Exercice 2

On considère une poutre de rigidité $EI = 10^6 \text{ Nm}^2$, soumise à une densité linéique de forces constante f sur une zone $[x_1^{P_2}, x_1^{P_3}]$ (cf. Figure).

— Déterminer et calculer la flèche au point $x_1^{P_2}$.



5 Torsion des poutres à section circulaire

5.1 Introduction

Le mode de torsion se retrouve dans un grand nombre d'éléments de structures et de machines : arbres de transmission, vilebrequins entre autres. Nous aborderons uniquement l'étude des poutres droites à section circulaire, pour lesquelles les hypothèses suivantes seront admises :

- chaque section reste plane lors du chargement ;
- chaque "diamètre" reste droit.

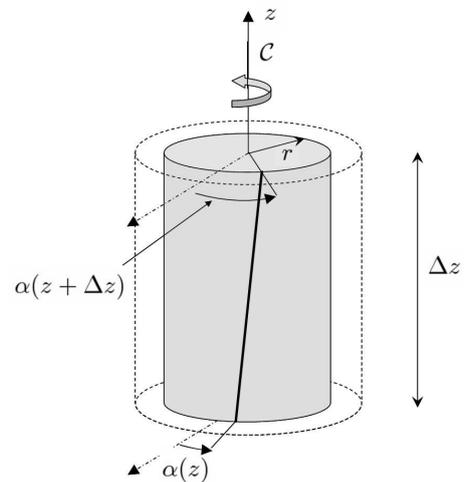
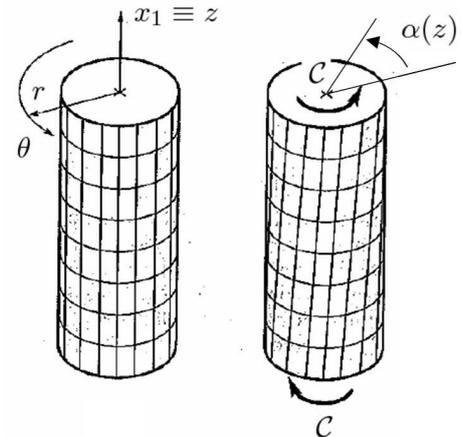
Notons que ces hypothèses peuvent être interprétées comme une conséquence du principe de Saint Venant. Elles restent également valables dans le cadre où des petites perturbations sont considérées (HPP).

Considérons l'expérience d'un arbre cylindrique soumis à un couple \mathcal{C} : il apparaît que les fibres longitudinales s'inclinent par rapport à leurs positions d'origine. La seule déformation apparente est donc celle de la surface circonférentielle, c'est-à-dire induite par l'inclinaison de ces fibres longitudinales.

Plus généralement, notons $\alpha(z)$ la rotation qu'effectue au cours du chargement une section repérée à la position z . L'inclinaison des fibres longitudinales positionnées à une distance r du centre de l'arbre est constante : dans le cadre HPP, elle s'exprime par :

$$\text{Inclinaison des fibres longitudinales en } r \equiv r \frac{\Delta\alpha}{\Delta z}$$

où $\Delta\alpha = \alpha(z + \Delta z) - \alpha(z)$ représente la variation de rotation entre deux sections repérées aux abscisses respectives z et $z + \Delta z$.



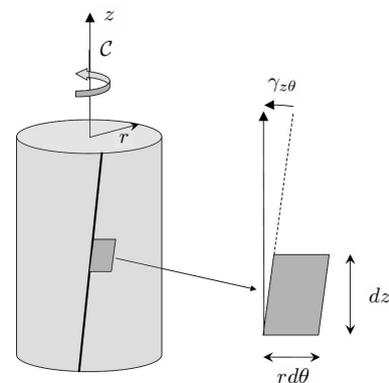
5.2 Notion de distorsion angulaire et de contrainte de cisaillement

L'angle d'inclinaison des fibres longitudinales, positionnées à une distance r du centre de l'arbre, représente la distorsion angulaire d'une surface élémentaire $rd\theta \times dz$ positionnée également à la distance r . Cette distorsion angulaire, notée $\gamma_{z\theta}$, est indépendante des coordonnées z et θ . Elle s'exprime par :

$$\gamma_{z\theta} = r \frac{\partial\alpha(z)}{\partial z}$$

La distorsion angulaire représente la variation relative du déplacement circonférentiel, noté u_θ et tel que $u_\theta = r\alpha$, par rapport à la dimension z . En d'autres termes, $\gamma_{z\theta}$ traduit une déformation qui s'exprime également par $\gamma_{z\theta} = \partial u_\theta / \partial z$.

Remarque. La distorsion angulaire $\gamma_{z\theta}$ varie linéairement en fonction du rayon r .



D'une manière similaire au cas du chargement uniaxial, il existe une relation de dépendance entre la distorsion angulaire $\gamma_{z\theta}$ (qui représente une déformation) et une contrainte $\sigma_{z\theta}$, dite de *cisaillement*. Ce terme représente un champ de forces surfaciques orienté selon \vec{e}_θ et s'appliquant sur la section transversale de l'arbre (i.e. orientée selon \vec{e}_z). La relation contrainte-déformation s'écrit dans le cas présent de la manière suivante :

$$\sigma_{z\theta} = G\gamma_{z\theta}$$

où G représente le module de cisaillement, défini par :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

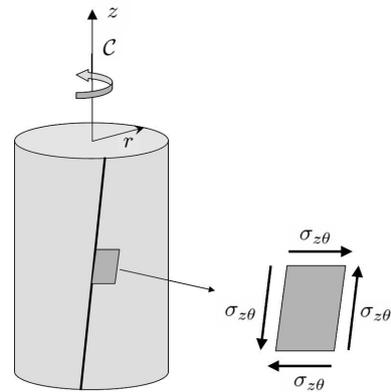
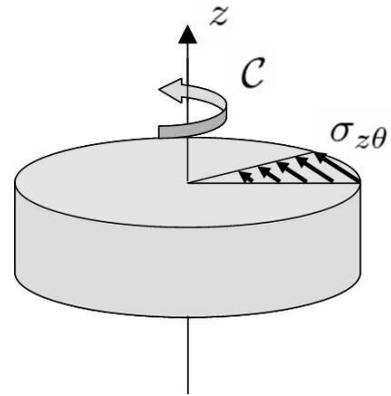
E et ν représentent, respectivement, le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Remarques.

- La contrainte de cisaillement $\sigma_{z\theta}$, elle aussi, varie linéairement en fonction du rayon r .
- La contrainte de cisaillement $\sigma_{z\theta}$ traduit également un champ de forces surfaciques orienté selon \vec{e}_z et s'appliquant sur une surface orientée selon \vec{e}_θ .

A partir de la contrainte $\sigma_{z\theta}$, le couple s'exprime alors par :

$$C = \int_S r\sigma_{z\theta} dS,$$



5.3 Equation de la déformée

Reprenons les équations suivantes, précédemment établies :

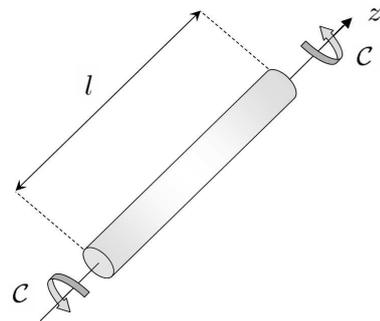
$$C = \int_S r\sigma_{z\theta} dS \quad , \quad \sigma_{z\theta} = G\gamma_{z\theta} \quad , \quad \gamma_{z\theta} = r \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad z \in]0, l[$$

Sur la base de ces équations, l'équation de la déformée s'écrit alors :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{C}{GJ} \quad z \in]0, l[$$

où J représente le moment d'inertie polaire de la section, tel que : $J = \int_S r^2 dS$

Preuve.



Par intégration de l'équation de la déformée, la rotation de la section α s'exprime par :

$$\alpha(z) = \frac{C}{GJ}z + D \quad z \in]0, l[$$

où la constante D est déterminée sur la base des conditions aux limites cinématiques du système. La variation de rotation de section $\delta\alpha$, entre les extrémités d'un arbre de longueur l , s'exprime finalement par :

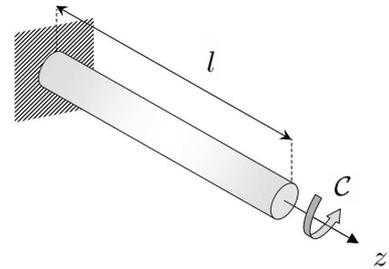
$$\delta\alpha = \alpha(l) - \alpha(0) = \frac{Cl}{GJ}$$

Remarque. Ci-dessus, le terme GJ/l joue le rôle d'une raideur (de torsion) k_t , telle que $C = k_t\delta\alpha$.

5.4 Exercices

Exercice 1

On considère un arbre cylindrique de longueur l , de module de cisaillement G et de moment d'inertie polaire J . La structure est encastree en $z = 0$ et soumise en $z = l$ à un couple C orienté positivement selon \vec{e}_θ .



- Exprimer la condition aux limites en $z = 0$;
- Exprimer la rotation de section de l'arbre en $z = l$.

Exercice 2

On considère un système de deux arbres cylindriques coaxiaux dont les caractéristiques respectives sont : longueurs l_1 et l_2 ; modules de cisaillement G_1 et G_2 , moments d'inertie polaires J_1 et J_2 . Les deux arbres sont encastres en $z = 0$ et sollicités en $z = l_1 + l_2$ par un couple C orienté positivement.

- 1^{er} cas : les deux arbres sont simplement connectés en $z = l_1$. Exprimer la rotation de l'extrémité droite de l'arbre 2 (en $z = l_1 + l_2$).
- 2^{ème} cas : même question que précédemment mais lorsque la jonction est soumise à un couple C' orienté négativement.

