DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toute réponse non justifiée sera comptée comme nulle.**
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (2 points)

1. Soit (P) la propriété suivante :

$$(P) \ : \ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}\,;\ y = x^2.$$

   Écrire la négation $non(P)$ de (P) puis déterminer si (P) est vraie ou fausse.

2. Donner les interprétations en termes de limites des deux phrases suivantes sur f (on n'attend pas de justification).

(a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}\,; x \geqslant A \implies |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

(b) $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \neq 3\,;\ |x-3| \leqslant \alpha$ *et* $|f(x)+4| > \varepsilon$.

Exercice 2. (5.5 points)

Déterminer pour les fonctions f suivantes :

- le domaine de définition
- les limites de f au voisinage du point a spécifié.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2-3}{-3x-1} - 1\right)$ en $a = -\infty$.
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3-3x^2+3x-2}{x-1}}$ en $a = 1$ et en $a = -\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\sqrt{x^2-4}}$ en $a = -2$.

Exercice 3. (1.5 points)
La fonction suivante est elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x \leqslant 0 \\ 2\left|x - \dfrac{1}{2}\right| \text{ si } 0 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{5x+2}{x+2} \text{ si } x > 2 \end{cases}.$$

Exercice 4. (4 points)

1. Donner le domaine de définition de l'expression

$$f(x) = \ln\left(6 - |x^2 - 10|\right) - \ln\left(4 - |x - 1|\right).$$

2. Déterminer et représenter graphiquement les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$|-x + y - 1| \leqslant 2 \text{ et } |x + y| \leqslant 1.$$

Exercice 5. (2 points)
Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{\sqrt{x+2}}$. Donner le domaine de définition de f. Peut-on prolonger par continuité f à un intervalle plus grand ? Si c'est le cas, on donnera l'expression de la fonction prolongée $\tilde{f}$, ainsi que son nouveau domaine de définition.

Exercice 6. (5 points)
Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier à chaque fois.

1. $\sin(x) + x^2 + 2e^x \sim e^x$ quand $x \to +\infty$.
2. $x > 1$ est une condition suffisante pour que $ln(x)$ soit bien défini.
3. Le système suivant n'a pas de solution : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$.
4. $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \sim \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.
5. $e^{x^2-x+1} = o(e^{x^2})$ en $+\infty$.

Exercice 7. (1.5 points)
Montrer par récurrence que pour $n \geqslant 1$, la proposition $\mathcal{P}(n) : n! \geqslant 2^{n-1}$ est vraie.
