DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°1

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (3 points)
Déterminer l'équivalent en $+\infty$ le plus simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)(e^n + n)$.
2. $v_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3n + 4n^2}$.
3. $w_n = \sin\left(\frac{2}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

Exercice 2. (6 points)
Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $F(X) = \frac{X^4 - 2X^3 + X^2 + X + 1}{X(X-2)}$.
2. $F(X) = \frac{X^2}{(X+2)(X^3 - 4X)}$.
3. $F(X) = \frac{5X^2 - X - 5}{X^4 + 5X^3}$.
4. $F(X) = \frac{X^2 + 2}{(X-1)^2(X^2+1)}$.

Exercice 3. (3.5 points)
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. Montrer que si f et g sont des endomorphismes de E, alors $g \circ f$ est encore un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f est injective si, et seulement si, $rang(f) = dim(E)$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Démontrer que f ne peut pas être surjective.

Exercice 4. (4 points)
Soit f l'application définie par : $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P'(1), P(0)) \end{cases}$

1. Rappeler la dimension de $E = \mathbb{R}_2[X]$ et déterminer l'image du polynôme $P = X^2 + 2X$ par φ.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.
4. Déterminer $Im\varphi$ ainsi que $rang(\varphi)$.
5. L'application φ est-t-elle un isomorphisme ?

Exercice 5. (4 points)

Pour chacune de ces applications linéaires, déterminer son noyau et son image, et déterminer si elle est injective, surjective, bijective.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, 3x + 6y) \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, y - z, 2x + 3y + 3z) \end{cases}$