DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°2

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (4 points)
Soit $f : t \mapsto \sqrt{t+2}$. on définit la suite (u_n) par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer d'éventuels points fixes de f.
2. Donner en justifiant un intervalle I stable par f contenant u_0. Que peut on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Déterminer le sens de variation de (u_n).
4. Justifier que u_n est majorée et étudier la convergence de (u_n).
5. On prend désormais $u_0 = 3$, en utilisant les questions précédentes, étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

Exercice 2. (6 points)
Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $u_1 = -e_1 + e_2$, $u_2 = -e_1 + 3e_2 + e_3$ et $u_3 = e_2 + e_3$.

1. Déterminer $Ker(f)$. En déduire $rang(f)$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E. Écrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Donner P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis déterminer P^{-1}. Que représente P^{-1} autre que la matrice inverse de P ?
4. Donner la relation reliant M, D, P et P^{-1}.
5. Soit $v = e_1 + e_2$. Calculer les coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$, puis calculer $f(v)$ dans $\mathcal{B}'$.
6. Soit $w = u_1 + 5u_2 + 3u_3$. Déterminer $f(w)$ et l'exprimer dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3. (5 points)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de sa base canonique.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (-5x + 2y, -8x + 3y)$.

1. Écrire M la matrice de l'application f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (u, v)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On justifiera que $\mathcal{B}'$ est une base.
3. En écrivant T sous la forme d'une somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente, calculer T^{10}.
4. Déterminer $f^{10}(1, 0)$.

Exercice 4. (2 points)
Soient a un nombre réel fixé. On considère le système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} x+y+z &= a \\ 2x+2y+z &= 0 \\ -x-y+3z &= a \end{cases}$$

Résoudre le système en fonction de la valeur de a.

Exercice 5. (3 points)
Résoudre chacune de ces équations différentielles avec les conditions initiales proposées le cas échéant.

1. $ty' + 2y = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $x^2y' - y^2 = 0$ et $y(1) = 2$