DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. Questions de cours (2 points)

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons (P) la propriété suivante

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad -t \leqslant f(x) \leqslant t.$$

(a) Donner un exemple de fonction vérifiant (P).
(b) Donner la négation de la propriété (P).

2. Interpréter la phrase suivante où f une fonction définie sur D_f,

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f \quad |x+7| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant B.$$

Exercice 2. (7 points)

Déterminer si les fonctions f suivantes admettent une limite en a et la calculer si c'est le cas :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$ en $a = 3$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}$ en $a = -2$.
3. $f(x) = \dfrac{x^3+4x+\cos(x)}{2x^2-\sin(x)}$ en $a = +\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{2+|x+3|}{x+1}$ en $a = -3$.
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{-x}}$ en $a = -\infty$.
6. $f(x) = \dfrac{\ln(1-2x)}{3x}$ en $a = 0$.

Exercice 3. (1 points)
La fonction suivante est elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$\begin{cases} f(x) = |x| \text{ si } x \leqslant 1 \\ f(x) = (x-2)^2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 4. (3 point)
On définit $f(x)$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x^2-5x-6}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Donner le domaine de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.

Exercice 5. (2.5 points)

1. Déterminer les réels x tels que : $|x - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{3}{2}$ et $|2x-2| < 3$.
2. Déterminer les couples (x, y) du plan tels que $|y| \leqslant |x+y|$. On donnera une représentation graphique des solutions.

Exercice 6. (4.5 points)

Considérons la fonction f telle que : $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
3. Sur un intervalle approprié calculer f' puis f".
4. Déterminer $f([-1, 3])$.