DEVOIR SURVEILLE M2.1 N°1

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (4 points)

1. Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$. A-t-on $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = o(f(x))$ ou aucun des deux dans chacun des cas suivants :
   (a) quand $x \to 0$?
   (b) quand $x \to +\infty$?
   (c) quand $x \to -\infty$?
2. Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + e^{\frac{x}{3}}$.
3. Déterminer le $DL_4(0)$ de $g(x) = \dfrac{2}{1-3x^2}$.

Exercice 2. (2 points)
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications. On suppose que $\forall x \in E$, $g(f(x)) = x$.

1. Montrer que f est injective et que g est surjective.
2. (bonus) Par rapport au théorème du cours, quelle hypothèse faudrait-il ajouter pour pouvoir affirmer que f et g sont toutes les deux bijectives ?

Exercice 3. (4 points)
Pour chacune des fonctions f, déterminer $f^{-1}(\{0,1,2,3,4,5\})$ puis déterminer si f est injective, surjective, bijective (ou non). Dans le cas échéant, déterminer la bijection réciproque de f (en précisant les ensembles de départ et d'arrivée).

1. $f(x) = x^2 + 1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
2. $f(x) = x^2 + 1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.
3. $f(x) = x^2 + 1$ de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Exercice 4. (4 points)

Pour les trois fonctions suivantes, préciser si elles sont injectives, surjectives, bijectives. Déterminer la bijection réciproque le cas échéant.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, 3x+5y) \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} - 3 + i \end{cases}$

3. $f_3 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc \end{cases}$.

Exercice 5. (4 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

1. Etudier la fonction $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $g(\mathbb{R})$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$
3. En déduire le domaine de définition de f.
4. Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.
5. En déduire une simplification de f.

Exercice 6. (2 points)

1. Écrire puis résoudre le système suivant en utilisant le calcul matriciel : $\begin{cases} 5x + 9y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$
2. A quelle condition sur a la matrice suivante est-elle inversible ? $A = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$