# DEVOIR 2 M2.1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**

---

**Exercice 1.** (6 points)

1. Déterminer l'équation de la tangente en $a = 1$ ainsi que la position relative de la courbe par rapport à cette tangente de $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
2. Donner un équivalent simple de $f_2(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{\ln(1+2x) - \sin(2x)}$ en 0. En déduire la limite de $f_2(x)$ quand $x \to 0$, avec $x > 0$.
3. Donner un équivalent simple de $f_3(x) = \dfrac{x^2 \ln(\dfrac{x+1}{x})}{e^x - x}$ en $+\infty$. En déduire la limite en $+\infty$ de $f_3$.
4. Donner le $DL_2(+\infty)$ de $\exp\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.
5. Déterminer l'asymptote de $f_5(x) = \sqrt{2 + x + x^2}$ ainsi que sa position position relative à $f_5$ en $-\infty$

---

**Exercice 2.** (2 points)
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, -1)$ ou $w = (1, -1, 5)$.

1. La famille $(u, v, w)$ est-elle une base ?
2. Quel est le rang de la famille $(u, v, w)$ ?

---

**Exercice 3.** (2 points)
On se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E$ ? On pourra si besoin directement identifier un sous espace vectoriel connu.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 = y^2\}$.
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 2x - 3y = 5\}$.
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x = 0\}$.

---

**Exercice 4.** (1.5 points)
Dans $E = \mathbb{R}^2$, justifier que $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (3, -1)$ forment une base de $E$ et donner les coordonnées du vecteur $v = (5, 0)$ dans cette base.

---

**Exercice 5.** (2.5 points) On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. Décrire géométriquement la nature des sous-espaces vectoriels suivants et en donner une base.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x - y + 3z = 0\}$.
2. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + y + 3z = 0 \text{ et } x - 2y + 3z = 0\}$.

**Exercice 6.** (7 points)

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels ayant 1 comme racine double. Quelle est la forme de $P$ ?
2. On se place désormais dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes réels **de degré au plus 2**. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\, P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\, P(0) = P(1)\}$.

(a) Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. On admettra que $G$ est également un sous-espace vectoriel de $E$.

(b) A l'aide de la question 1), donner l'expression des polynômes de $F$. En déduire une famille génératrice de $F$.

(c) A quelle condition $P = aX^2 + bX + c$ est-il dans $G$ ? En déduire une famille génératrice de $G$.

(d) Déterminer $F \cap G$.

(e) En déduire (en justifiant) les dimensions de $F$ et $G$.

(f) $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires dans $E$ ?