# DEVOIR 2 M2.1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**

---

**Exercice 1.** (6 points)

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en $a = 2$ de $f_1(x) = \ln(x)$.
2. Donner un équivalent simple de $f_2(x) = \left(1 + \dfrac{3}{2x}\right)^{x-1}$ en $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de $f_3(x) = \dfrac{e^x + 2}{x^2 + 3}$ en $+\infty$
4. Donner un équivalent simple de $f_4(x) = \dfrac{e^x + 2}{x^2 + 3}$ en 0
5. Donner la limite en 0 de $f_5(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\cos(3x) - 1}$.
6. On pose $f_6(x) = \dfrac{\ln(1 + 2x)}{\cos(x)}$. Déterminer la tangente à la courbe en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

---

**Exercice 2.** ( 2 points)
Les deux questions ci dessous sont indépendantes.

1. Dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ quelles sont les coordonnées du polynôme $P(X) = 2X^2 - 3X + 7$ ?
2. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$ espace vectoriel $E$. Démontrer que $F + G$ est un sous espace vectoriel de $E$.

---

**Exercice 3.** (3 points)

Les sous espaces $V$ suivants sont ils des sous espaces vectoriels de $E$ ? On pourra si besoin directement identifier un sous espace vectoriel connu.

1. $V = \{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad a_1 + a_2 = a_4\}$ et $E = M_2(\mathbb{R})$ muni des lois usuelles
2. $V$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ et $E$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munies des lois usuelles.
3. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\, x - y = 0 \quad \text{et} \quad 2x + y - z = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

**Exercice 4.** (5.5 points)
On considère dans $E = \mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants : $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ $v_4 = (0, 0, 2, 1)$ et $v_5 = (2, 1, 0, 1)$.

1. **Sans calculs** peut on savoir si la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est libre ? est génératrice de $E$ ?
2. La famille $(v_1, v_2, v_3)$ est elle libre ? est elle génératrice de $E$ ?
3. Quel est le rang de la famille $(v_1, v_2, v_3)$ ?
4. En posant $F = Vect(v_1, v_2)$ et $G = Vect(v_3)$ : $F$ et $G$ sont ils en somme directe ? sont ils supplémentaires ?
5. $(v_1, v_2, v_4, v_5)$ est elle une base de $E$ ?
6. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_4, v_5)$ sont ils supplémentaires dans $E$ ?
7. En utilisant les questions précédentes pour $G = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, déterminer la dimension de $G$.

---

**Exercice 5.** (3.5 points)
On considère l'ensemble $E$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $F = Vect(f_1 : x \to e^x; f_2 : x \to x)$ et $G = \{f \in E; \quad f(1) = 0\}$.

1. Démontrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ (on attend une justification pour $F$ et une preuve pour $G$).
2. Déterminer la dimension de $F$.
3. Déterminer $F \cap G$. Quelle est sa dimension ?

---

Formulaire : Développements limités usuels en 0.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\text{ch } x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\text{sh } x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}
$$